微专题56 数列中的整数问题

一、基础知识：

1、整数的基本性质：

（1）整数的和，差，积仍为整数

（2）整数的奇偶性：若$n=2k+1\left(k\in Z\right)$，则称$n$为奇数；若$n=2k\left(k\in Z\right)$，则称$n$为偶数，在加，减，乘法运算中，其结果有以下规律：

① 奇数$\pm$奇数$=$偶数

② 奇数$\pm$偶数$=$奇数

③ 偶数$\pm$偶数$=$偶数

④ 奇数$\times$偶数$=$偶数

⑤ 偶数$\times$偶数$=$偶数

⑥ 奇数$\times$奇数$=$奇数

（3）若$a,b\in Z$，且$a<b$，则$a\le b-1$

（4）已知$a,b\in R,a<b$，若$n\in Z$，且$n\in\left(a,b\right)$，则n只能取到有限多个整数（也有可能无解）

（5）若$\dfrac{a}{b}\in Z$，称a能被b整除，则有：

① $\left|b\right|\le\left|a\right|$

② b为a的一个因数

（6）最小数原理：自然数集的任何非空子集，均有一个最小的自然数

2、整数性质的应用：

（1）若变量属于整数，则利用方程与不等式均可求出变量的值：在实数范围内，若要求得变量的值，通常要依赖方程，而不等式只能解得变量的范围。但是在整数范围内，除了方程，在不等式中也可以利用整数的离散性求出变量的值（即性质（4）），例如：若$n\in N,n\in\left(2,5\right)$，则$n$的取值只能是$3,4$。所以在涉及求整数的值时，思路不要局限于寻找等量关系，构造不等关系依然可以求解。

（2）整除问题：若表达式形式较为简单，可通过对常数进行因数分解，进而确定变量的取值；若表达式次数较高，则可以先利用二项式定理去掉高次的项，再进行处理。

（3）多元整数不定方程：当变量的值为整数时，不定方程的解可能有有限多组解。通常的处理方式有两个：

① 通过对表达式进行因式分解，对另一侧的常数进行因数分解，进而将不定方程拆成多个方程的方程组，进而解出变量

② 将一个字母视为变量（其余视为参数）并进行参变分离，求出含变量函数的值域，进而将参数置于一个范围内，再利用整数离散性求得参数的值

（4）反证法：运用反证法处理整数问题时，常见的矛盾有以下几点：

① 所解得变量非整数，或不符合已知范围

② 等式两侧为一奇一偶

3、整数问题通常会与数列联系起来，其特征就是数列中项的序数，以及前 n 项和的项数，均为正整数。

二、典型例题：

例 1：已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-7$，若 $\dfrac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的项，则 $m=$____

思路：$\dfrac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}=\dfrac{(2m-7)(2m-5)}{2m-3}$，$\{a_n\}$ 中的项为大于等于 -5（$a_1=-5$）的奇数，所以考虑将 $\dfrac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ 向奇数形式变形：$\dfrac{(2m-7)(2m-5)}{2m-3}=\dfrac{\left[(2m-3)-4\right]\cdot\left[(2m-3)-2\right]}{2m-3}$

$=(2m-3)-6+\dfrac{8}{2m-3}=2m-9+\dfrac{8}{2m-3}$，可得 $\dfrac{8}{2m-3}$ 应该为大于等于 4 的偶数，所以 $\dfrac{8}{2m-3}=4$ 或 $\dfrac{8}{2m-3}=8$，解得 $m=\dfrac{5}{2}$（舍）或 $m=2$

答案：$m=2$

小炼有话说：（1）本题的亮点在于对 $\dfrac{(2m-7)(2m-5)}{2m-3}$ 的变形，在有关整数的问题里，通常可对分式进行“分离常数”的变形，从而将复杂的分式简化，并能立刻找到需处理的部分。例如在本题中通过“分离常数”可迅速将目标锁定在 $\dfrac{8}{2m-3}$ 上。

（2）本题对 $\dfrac{8}{2m-3}$ 的处理有多个角度，还可以从分母出发，观察到 $2m-3$ 应为奇数，而 $\dfrac{8}{2m-3}\in Z$，而 8 的奇因数只有 1 和 -1，同样可确定 m 的值。

例 2：已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$，设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1=1, S_2\cdot S_3=36$

（1）求 a_n 的通项公式

（2）求 $m,k\left(m,k\in N^*\right)$ 的值，使得 $a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{m+k}=65$