

微专题 91 复数

一、基础知识：

复数题目通常在高考中有所涉及，题目不难，通常是复数的四则运算 1、复数 z 的代数形式为 $z = a + bi$ ($a, b \in R$)，其中 a 称为 z 的实部， b 称为 z 的虚部（而不是 bi ），

2、几类特殊的复数：

(1) 纯虚数： $a = 0, b \neq 0$ 例如： $5i$ ， i 等

(2) 实数： $b = 0$

3、复数的运算：设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in R$)

(1) $i^2 = -1$

(2) $z_1 \pm z_2 = (a + c) + (b + d)i$

(3) $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

注：乘法运算可以把 i 理解为字母，进行分配率的运算。只是结果一方面要化成标准形式，另一方面要计算 $i^2 = -1$

(4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

注：除法不要死记公式而要理解方法：由于复数的标准形式是 $z = a + bi$ ($a, b \in R$)，所以不允许分母带有 i ，那么利用平方差公式及 $i^2 = -1$ 的特点分子分母同时乘以 z_2 的共轭复数即可。

4、共轭复数： $\bar{z} = a - bi$ ，对于 z 而言，实部相同，虚部相反

5、复数的模： $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ($|z|^2 \neq z^2$)

6、两个复数相等：实部虚部对应相等

7、复平面：我们知道实数与数轴上的点一一对应，推广到复数，每一个复数 $a + bi$ ($a, b \in R$) 都与平面直角坐标系上的点 (a, b) 一一对应，将这个平面称为复平面。横坐标代表复数的实部，纵轴称为虚轴。

8、处理复数要注意的几点：

(1) 在处理复数问题时，一定要先把复数化简为标准形式，即 $z = a + bi$ ($a, b \in R$)

(2) 在实数集的一些多项式公式及展开在复数中也同样适用。例如：平方差公式，立方和差公式，二项式定理等

二、典型例题

例 1：若复数 $z = 2i + \frac{2}{1+i}$ ，其中 i 是虚数单位，则复数 z 的模为（ ）

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

思路：需要求复数的模，那首先要化成标准形式 $z = a + bi$ ，进行化简，目前需要处理的就是分式，化简再求模即可

$$\text{解： } z = 2i + \frac{2}{1+i} = 2i + \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 2i + 1 - i = 1 + i$$

$$\therefore |z| = \sqrt{2}$$

答案：A

例 2：已知复数 $z = 1 - i$ ，则 $\frac{z^2 - 2z}{z - 1} =$ （ ）

- A. $2i$ B. $-2i$ C. 2 D. -2

思路：本题可直接带入计算，也可考虑先化简再求值

$$\text{解： } \frac{z^2 - 2z}{z - 1} = \frac{z^2 - 2z + 1 - 1}{z - 1} = z - 1 - \frac{1}{z - 1} = -i - \frac{1}{-i} = -2i$$

答案：B

例 3：设 i 是虚数单位，且 $i^{2014} = \frac{i - k}{ki - 1}$ ，则实数 k 等于（ ）

- A. 2 B. 0 C. 1 D. -1

思路：等号左边 $i^{2014} = i^2 = -1$ ，若化简等号右边则比较麻烦。所以考虑利用等式性质两边同

乘 $(ki - 1)$ ，然后利用复数相等的性质求出 k 值

$$\text{解： } i^{2014} = \frac{i - k}{ki - 1} \Leftrightarrow -1 = \frac{i - k}{ki - 1} \Leftrightarrow 1 - ki = -k + i \quad \therefore k = -1$$

答案：D

小炼有话说：

(1) i 的指数幂呈周期性变化（周期为 4）即 $i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, i^{4n} = 1$ 。故可依照周期性的想法，将 i 的较高指数幂进行降次。

(2) 对于呈分式形式的复数等式，一般两种处理方法：一是对分式本身进行化简，二是利用等式性质进行“去分母”（尤其是分母形式较复杂时）