

微专题 86 事件的关系与概率运算

一、基础知识

1、事件的分类与概率：

- (1) 必然事件：一定会发生的事件，用 Ω 表示，必然事件发生的概率为 100%
- (2) 不可能事件：一定不会发生的事件，用 $\varnothing$ 表示，不可能事件发生的概率为 0%
- (3) 随机事件：可能发生也可能不发生的事件，用字母 A, B, C 进行表示，随机事件的概率 $P \in [0, 1]$

2、事件的交并运算：

(1) 交事件：若事件 C 发生当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生，则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的交事件，记为 $A \cap B$ ，简记为 AB

多个事件的交事件： $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ ：事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生

(2) 并事件：若事件 C 发生当且仅当事件 A 与事件 B 中至少一个发生（即 A 发生或 B 发生），则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的并事件，记为 $A \cup B$

多个事件的并事件： $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ ：事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少一个发生

3、互斥事件与概率的加法公式：

(1) 互斥事件：若事件 A 与事件 B 的交事件 $A \cap B$ 为不可能事件，则称 A, B 互斥，即事件 A 与事件 B 不可能同时发生。例如：投掷一枚均匀的骰子，设事件“出现 1 点”为事件 A ，“出现 3 点”为事件 B ，则两者不可能同时发生，所以 A 与 B 互斥

(2) 若一项试验有 n 个基本事件： $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ，则每做一次实验只能产生其中一个基本事件，所以 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之间均不可能同时发生，从而 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥

(3) 概率的加法公式（用于计算并事件）：若 A, B 互斥，则有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

例如在上面的例子中，事件 $A \cup B$ 为“出现 1 点或出现 3 点”由均匀的骰子可得

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6}, \text{ 所以根据加法公式可得: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3}$$

(4) 对立事件：若事件 A 与事件 B 的交事件 $A \cap B$ 为不可能事件，并事件 $A \cup B$ 为必然事件，则称事件 B 为事件 A 的对立事件，记为 $B = \bar{A}$ ，也是我们常说的事件的“对立面”，对立事件

概率公式： $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ ，关于对立事件有几点说明：

- ① 公式的证明：因为 $A, \bar{A}$ 对立，所以 $A \cap \bar{A} = \emptyset$ ，即 $A, \bar{A}$ 互斥，而 $A \cup \bar{A} = \Omega$ ，所以 $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ ，因为 $P(\Omega) = 1$ ，从而 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- ② 此公式也提供了求概率的一种思路：即如果直接求事件 A 的概率所讨论的情况较多时，可以考虑先求其对立事件的概率，再利用公式求解
- ③ 对立事件的相互性：事件 B 为事件 A 的对立事件，同时事件 A 也为事件 B 的对立事件
- ④ 对立与互斥的关系：对立关系要比互斥关系的“标准”更高一层。由对立事件的定义可知： A, B 对立，则 A, B 一定互斥；反过来，如果 A, B 互斥，则不一定 A, B 对立（因为可能 $A \cup B$ 不是必然事件）

4、独立事件与概率的乘法公式：

（1）独立事件：如果事件 A （或 B ）发生与否不影响事件 B （或 A ）发生的概率，则称事件 A 与事件 B 相互独立。例如投掷两枚骰子，设“第一个骰子的点数是 1”为事件 A ，“第二个骰子的点数是 2”为事件 B ，因为两个骰子的点数不会相互影响，所以 A, B 独立

（2）若 A, B 独立，则 A 与 $\bar{B}$ ， B 与 $\bar{A}$ ， $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立

（3）概率的乘法公式：若事件 A, B 独立，则 A, B 同时发生的概率 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ ，比如在上面那个例子中， $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}$ ，设“第一个骰子点数为 1，且第二个骰子点数为 2”为事件 C ，则 $P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{36}$ 。

（4）独立重复试验：一项试验，只有两个结果。设其中一个结果为事件 A （则另一个结果为 $\bar{A}$ ），已知事件 A 发生的概率为 p ，将该试验重复进行 n 次（每次试验结果互不影响），则在 n 次中事件 A 恰好发生 k 次的概率为 $P = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

① 公式的说明：以“连续投掷 3 次硬币，每次正面向上的概率为 $\frac{1}{2}$ ”为例，设 A_i 为“第 i 次正面向上”，由均匀的硬币可知 $P(A_i) = \frac{1}{2}$ ，设 B 为“恰好 2 次正面向上”，则有：

$$P(B) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3)$$

$$\text{而 } P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = P(A_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$