

微专题 52 等差等比数列的证明

在数列的解答题中,有时第一问会要求证明某个数列是等差等比数列,既考察了学生证明数列的能力,同时也为后面的问题做好铺垫。

一、基础知识:

1、如何判断一个数列是等差(或等比)数列

(1) 定义法(递推公式): $a_{n+1} - a_n = d$ (等差), $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (等比)

(2) 通项公式: $a_n = kn + m$ (等差), $a_n = k \cdot q^n (q \neq 0)$ (等比)

(3) 前 n 项和: $S_n = An^2 + Bn$ (等差), $S_n = kq^n - k$ (等比)

(4) 等差(等比)中项: 数列从第二项开始,每一项均为前后两项的等差(等比)中项

2、如何证明一个数列是等差等比数列:

(1) 通常利用定义法,寻找到公差(公比)

(2) 也可利用等差等比中项来进行证明,即 $\forall n \in N^*$, 均有:

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \quad (\text{等差}) \quad a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} \quad (\text{等比})$$

二、典型例题:

例 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{3}{5}$, $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1}, n \in N^*$.

求证: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 为等比数列

思路一: 构造法,按照所给的形式对已知递推公式进行构造,观察发现所证的数列存在 $\frac{1}{a_n}$ 这

样的倒数,所以考虑递推公式两边同取倒数: $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{3a_n}$

即 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3a_n}$, 在考虑构造“-1”: $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3a_n} - 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right)$

即数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列

思路二: 代入法: 将所证数列视为一个整体,用 b_n 表示: $b_n = \frac{1}{a_n} - 1$, 则只需证明 $\{b_n\}$ 是等

比数列即可,那么需要关于 b_n 的条件(首项,递推公式),所以用 b_n 将 a_n 表示出来,并代换

到 a_n 的递推公式中, 进而可从 b_n 的递推公式出发, 进行证明

解: 令 $b_n = \frac{1}{a_n} - 1$, 则 $a_n = \frac{1}{b_n + 1}$

$$\therefore \text{递推公式变为: } \frac{1}{b_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3}{b_n + 1}}{2 \cdot \frac{1}{b_n + 1} + 1} \Rightarrow \frac{1}{b_{n+1} + 1} = \frac{3}{b_n + 3}$$

$$\Rightarrow b_n + 3 = 3b_{n+1} + 3 \Rightarrow b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$$

$\therefore \{b_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列。即数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 为等比数列

小炼有话说:

(1) 构造法: 在构造的过程中, 要寻找所证数列形式的亮点, 并以此为突破对递推公式进行变形, 如例 1 中就是抓住所证数列有一个“倒数”的特点, 进而对递推公式作取倒数的变换。所以构造法的关键之处在于能够观察到所证数列显著的特点并加以利用

(2) 代换法: 此方法显得模式化, 只需经历“换元 $\rightarrow$ 表示 $\rightarrow$ 代入 $\rightarrow$ 化简”即可, 说两点: 一

是代换 $b_n = \frac{1}{a_n} - 1$ 体现了两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的一种对应关系, 且这种对应是同序数项的对应

(第 n 项对应第 n 项); 二是经过代换, 得到 $\{b_n\}$ 的递推公式, 而所证 b_n 是等比数列, 那么意

味着其递推公式经过化简应当形式非常简单, 所以尽管代入之后等式复杂, 但**坚定地化简下去, 通常能够得到一个简单的答案**。个人认为, 代入法是一个比较“无脑”的方法, 只需循规蹈矩按步骤去做即可。

例 2: 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n + a_n = -\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1 (n \in N^*)$ (*). 设 $b_n = a_n + n$,

证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式

思路: 本题所给等式 S_n, a_n 混合在一起, 可考虑将其转变为只含 a_n 或只含 S_n 的等式, 题目中

$b_n = a_n + n$ 倾向于项的关系, 故考虑消掉 S_n , 再进行求解

$$\text{解: } S_n + a_n = -\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1 \quad ①$$

$$S_{n-1} + a_{n-1} = -\frac{1}{2}(n-1)^2 - \frac{3}{2}(n-1) + 1 (n \geq 2, n \in N) \quad ②$$

$$\therefore ① - ② \text{ 可得: } 2a_n - a_{n-1} = -n - 1 \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} - n - 1$$

$$\therefore 2(a_n + n) = a_{n-1} + (n-1) \Rightarrow a_n + n = \frac{1}{2}[a_{n-1} + (n-1)] \text{ 即 } b_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$$