

## 微专题 80 排列组合的常见模型

### 一、基础知识：

#### （一）处理排列组合问题的常用思路：

1、特殊优先：对于题目中有特殊要求的元素，在考虑步骤时优先安排，然后再去处理无要求的元素。

例如：用 0,1,2,3,4 组成无重复数字的五位数，共有多少种排法？

解：五位数意味着首位不能是 0，所以先处理首位，共有 4 种选择，而其余数位没有要求，只需将剩下的元素全排列即可，所以排法总数为  $N = 4 \times A_4^4 = 96$  种

2、寻找对立事件：如果一件事从正面入手，考虑的情况较多，则可以考虑该事的对立面，再用全部可能的总数减去对立面的个数即可。

例如：在 10 件产品中，有 7 件合格品，3 件次品。从这 10 件产品中任意抽出 3 件，至少有一件次品的情况有多少种

解：如果从正面考虑，则“至少 1 件次品”包含 1 件，2 件，3 件次品的情况，需要进行分类讨论，但如果从对立面想，则只需用所有抽取情况减去全是正品的情况即可，列式较为简单。

$$N = C_{10}^3 - C_7^3 = 85 \text{ (种)}$$

3、先取再排（先分组再排列）：排列数  $A_n^m$  是指从  $n$  个元素中取出  $m$  个元素，再将这  $m$  个元素进行排列。但有时会出现所需排列的元素并非前一步选出的元素，所以此时就要将过程拆分成两个阶段，可先将所需元素取出，然后再进行排列。

例如：从 4 名男生和 3 名女生中选 3 人，分别从事 3 项不同的工作，若这 3 人中只有一名女生，则选派方案有多少种。

解：本题由于需要先确定人数的选取，再能进行分配（排列），所以将方案分为两步，第一步：确定选哪些学生，共有  $C_4^2 C_3^1$  种可能，然后将选出的三个人进行排列： $A_3^3$ 。所以共有

$$C_4^2 C_3^1 A_3^3 = 108 \text{ 种方案}$$

#### （二）排列组合的常见模型

1、捆绑法（整体法）：当题目中有“相邻元素”时，则可将相邻元素视为一个整体，与其他元素进行排列，然后再考虑相邻元素之间的顺序即可。

例如：5 个人排队，其中甲乙相邻，共有多少种不同的排法

解：考虑第一步将甲乙视为一个整体，与其余 3 个元素排列，则共有  $A_4^4$  种位置，第二步考虑甲乙自身顺序，有  $A_2^2$  种位置，所以排法的总数为  $N = A_4^4 \cdot A_2^2 = 48$  种

2、插空法：当题目中有“不相邻元素”时，则可考虑用剩余元素“搭台”，不相邻元素进行“插空”，然后再进行各自的排序

注：（1）要注意在插空的过程中是否可以插在两边

（2）要从题目中判断是否需要各自排序

例如：有 6 名同学排队，其中甲乙不相邻，则共有多少种不同的排法

解：考虑剩下四名同学“搭台”，甲乙不相邻，则需要从 5 个空中选择 2 个插入进去，即有  $C_5^2$  种选择，然后四名同学排序，甲乙排序。所以  $N = C_5^2 \cdot A_4^4 \cdot A_2^2 = 480$  种

3、错位排列：排列好的  $n$  个元素，经过一次再排序后，每个元素都不在原先的位置上，则称为这  $n$  个元素的一个错位排列。例如对于  $a, b, c, d$ ，则  $d, c, a, b$  是其中一个错位排列。3 个元素的错位排列有 2 种，4 个元素的错位排列有 9 种，5 个元素的错位排列有 44 种。以上三种情况可作为结论记住

例如：安排 6 个班的班主任监考这六个班，则其中恰好有两个班主任监考自己班的安排总数有多少种？

解：第一步先确定那两个班班主任监考自己班，共有  $C_6^2$  种选法，然后剩下 4 个班主任均不监考自己班，则为 4 个元素的错位排列，共 9 种。所以安排总数为  $N = C_6^2 \cdot 9 = 135$

4、依次插空：如果在  $n$  个元素的排列中有  $m$  个元素保持相对位置不变，则可以考虑先将这  $m$  个元素排好位置，再将  $n - m$  个元素一个个插入到队伍当中（注意每插入一个元素，下一个元素可选择的空 +1）

例如：已知  $A, B, C, D, E, F$  6 个人排队，其中  $A, B, C$  相对位置不变，则不同的排法有多少种

解：考虑先将  $A, B, C$  排好，则  $D$  有 4 个空可以选择， $D$  进入队伍后， $E$  有 5 个空可以选择，以此类推， $F$  有 6 种选择，所以方法的总数为  $N = 4 \times 5 \times 6 = 120$  种

5、不同元素分组：将  $n$  个不同元素放入  $m$  个不同的盒中

6、相同元素分组：将  $n$  个相同元素放入  $m$  个不同的盒内，且每盒不空，则不同的方法共有  $C_{n-1}^{m-1}$  种。解决此类问题常用的方法是“挡板法”，因为元素相同，所以只需考虑每个盒子里所含元素个数，则可将这  $n$  个元素排成一列，共有  $(n-1)$  个空，使用  $(m-1)$  个“挡板”进入空档处，