

微专题 99 归纳推理与类比推理

一、基础知识：

（一）归纳推理：

1、归纳推理：由某类事物的部分对象具有某些特征，推出该类事物的全部对象都具有这些特征的推理，或者由个别事实概括出一般结论的推理，称为归纳推理（简称归纳），简言之，归纳推理是由部分到整体，由个别到一般的推理

2、处理归纳推理的常见思路：

（1）利用已知条件，多列出（或计算出）几个例子，以便于寻找规律

（2）在寻找规律的过程中，要注意观察哪些地方是不变的（形成通式的结构），哪些地方是变化的（找到变量），如何变化（变量变化的规律）

（3）由具体例子可将猜想的规律推广到一般情形，看是否符合题意

3、常见的归纳推理类型：

（1）函数的迭代：设 f 是 $D \rightarrow D$ 的函数，对任意 $x \in D$ ，记 $f^{(0)}(x) = x, f^{(1)}(x) = f(x), f^{(2)}(x) = f[f(x)], \dots, f^{(n+1)}(x) = f[f^{(n)}(x)]$ ，则称函数 $f^{(n)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次迭代；对于一些特殊的函数解析式，其 $f^{(n)}(x)$ 通常具备某些特征（特征与 n ）有关。在处理此类问题时，要注意观察解析式中项的次数，式子结构以及系数的特点，以便于从具体例子中寻找规律，得到 $f^{(n)}(x)$ 的通式

（2）周期性：若寻找的规律呈现周期性，则可利用函数周期性（或数列周期性）的特点求出某项或分组（按周期分组）进行求和。

（3）数列的通项公式（求和公式）：从数列所给的条件中，很难利用所学知识进行变形推导，从而可以考虑利用条件先求出几项，然后找到规律，猜出数列的通项公式（求和公式）

（4）数阵：由实数排成一定形状的阵型（如三角形，矩形等），来确定数阵的规律及求某项。对于数阵首先要明确“行”与“列”的概念。横向为“行”，纵向为“列”，在项的表示上通常用二维角标 a_{ij} 进行表示，其中 i 代表行， j 代表列。例如： a_{34} 表示第3行第4列。在题目中经常会出现关于某个数的位置问题，解决的方法通常为先抓住选取数的特点，确定所求数的序号，再根据每行元素个数的特点（数列的通项），求出前 n 行共含有的项的个数，从而确定该数位于第几行，然后再根据数之间的规律确定是该行的第几个，即列。

（二）类比推理：

1、类比推理：由两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有这些特征的推理，称为类比推理（简称类比）

2、常见的类比类型及处理方法：

（1）运算的类比：通常是运算级数相对应：

① 加法 $\leftrightarrow$ 乘法，

② 数乘（系数与项的乘法） $\leftrightarrow$ 指数幂

③ 减法 $\leftrightarrow$ 除法

（2）运算律的类比：在数学中的其它领域，如果满足加法，乘法的交换律，以及乘法的分配律，则代数表达式部分运算公式可推广到该领域中。例如

①在向量数量积的运算中，满足交换律与分配律，则：

代数中的平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ，和差完全平方公式：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{均可推广到向量数量积中：} \quad \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}),$$

$$(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

②在复数的运算中，满足交换律与分配律，则实数中的运算公式可推广到复数中（甚至是二项式定理）

（3）等差数列与等比数列的类比：等差数列的性质通常伴随着一，二级运算（加减，数乘），等比数列的性质通常伴随着二，三级运算（乘除，乘方）。所以在某些性质中体现出运算上的类比。例如：设 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 d ； $\{b_n\}$ 为等比数列，公比为 q ，则

① 递推公式： $a_{n+1} - a_n = d \leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$

② 通项公式： $a_n = a_1 + (n-1)d \leftrightarrow b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

③ 双项性质： $m+n = p+q \Leftrightarrow a_m + a_n = a_p + a_q \Leftrightarrow m+n = p+q \Leftrightarrow b_m b_n = b_p b_q$

④ 等间隔取项，在数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 中等间隔的取项：

则 $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}, \dots$ 成等差数列 $\leftrightarrow b_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_{k_m}, \dots$ 成等比数列

（4）维度的类比：平面几何（二维）的结论与立体几何（三维）的结论进行类比，当维度升高时，涉及的要素也将维度升高，例如：

①位置关系：平面中的线的关系 $\leftrightarrow$ 空间中的面的关系，线所成的角 $\leftrightarrow$ 线面角或二面角，