# 微专题57 放缩法证明数列不等式

一、基础知识：

在前面的章节中，也介绍了有关数列不等式的内容，在有些数列的题目中，要根据不等式的性质通过放缩，将问题化归为我们熟悉的内容进行求解。本节通过一些例子来介绍利用放缩法证明不等式的技巧

1、放缩法证明数列不等式的理论依据——不等式的性质：

（1）传递性：若 $a>b,b>c$，则 $a>c$（此性质为放缩法的基础，即若要证明 $a>c$，但无法直接证明，则可寻找一个中间量 $b$，使得 $a>b$，从而将问题转化为只需证明 $b>c$ 即可 ）

（2）若 $a>b,c>d$，则 $a+c>b+d$，此性质可推广到多项求和：

若 $a_1>f\left(1\right),a_2>f\left(2\right),\cdots,a_n>f\left(n\right)$，则：$a_1+a_2+\cdots+a_n>f\left(1\right)+f\left(2\right)+\cdots+f\left(n\right)$

（3）若需要用到乘法，则对应性质为：若 $a>b>0,c>d>0$，则 $ac>bd$，此性质也可推广到多项连乘，但要求涉及的不等式两侧均为正数

注：这两条性质均要注意条件与结论的不等号方向均相同

2、放缩的技巧与方法：

（1）常见的数列求和方法和通项公式特点：

① 等差数列求和公式：$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$，$a_n=kn+m$（关于 $n$ 的一次函数或常值函数）

② 等比数列求和公式：$S_n=\dfrac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}\left(q\neq1\right)$，$a_n=k\cdot q^n$（关于 $n$ 的指数类函数）

③ 错位相减：通项公式为“等差 $\times$ 等比”的形式

④ 裂项相消：通项公式可拆成两个相邻项的差，且原数列的每一项裂项之后正负能够相消，进而在求和后式子中仅剩有限项

（2）与求和相关的不等式的放缩技巧：

① 在数列中，“求和看通项”，所以在放缩的过程中通常从数列的通项公式入手

② 在放缩时要看好所证不等式中不等号的方向，这将决定对通项公式是放大还是缩小（应与所证的不等号同方向）

③ 在放缩时，对通项公式的变形要向可求和数列的通项公式靠拢，常见的是向等比数列与可裂项相消的数列进行靠拢。

④ 若放缩后求和发现放“过”了，即与所证矛盾，通常有两条道路选择：第一个方法是微调：看能否让数列中的一些项不动，其余项放缩。从而减小放缩的程度，使之符合所证不等式；

第二个方法就是推翻了原有放缩，重新进行设计，选择放缩程度更小的方式再进行尝试。

（3）放缩构造裂项相消数列与等比数列的技巧：

① 裂项相消：在放缩时，所构造的通项公式要具备“依项同构”的特点，即作差的两项可视为同一数列的相邻两项（或等距离间隔项）

② 等比数列：所面对的问题通常为“$S_n <$常数”的形式，所构造的等比数列的公比也要满足$\left|q\right| \in \left(0,1\right)$ ，如果题目条件无法体现出放缩的目标，则可从所证不等式的常数入手，，常数可视为$\dfrac{a_1}{1-q}$的形式，然后猜想构造出等比数列的首项与公比，进而得出等比数列的通项公式，再与原通项公式进行比较，看不等号的方向是否符合条件即可。例如常数$\dfrac{2}{3}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}$，即可猜想该等比数列的首项为$\dfrac{1}{2}$，公比为$\dfrac{1}{4}$，即通项公式为$2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ 。

注：此方法会存在风险，所猜出的等比数列未必能达到放缩效果，所以是否选择利用等比数列进行放缩，受数列通项公式的结构影响

（4）与数列中的项相关的不等式问题：

① 此类问题往往从递推公式入手，若需要放缩也是考虑对递推公式进行变形

② 在有些关于项的不等式证明中，可向求和问题进行划归，即将递推公式放缩变形成为可“累加”或“累乘”的形式，即$a_{n+1}-a_n<f\left(n\right)$或$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<f\left(n\right)$（累乘时要求不等式两侧均为正数），然后通过“累加”或“累乘”达到一侧为$a_n$，另一侧为求和的结果，进而完成证明

3、常见的放缩变形：

（1）$\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}<\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n\left(n-1\right)}$，其中$n\geq 2,n\in N$：可称$\dfrac{1}{n^2}$为“进可攻，退可守”，可依照所证不等式不等号的方向进行选择。

注：对于$\dfrac{1}{n^2}$，可联想到平方差公式，从而在分母添加一个常数，即可放缩为符合裂项相消特征的数列，例如：$\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{\left(n-1\right)\left(n+1\right)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，这种放缩的尺度要小于（1）中的式子。此外还可以构造放缩程度更小的，如：