

微专题 73 求参数的取值范围

一、基础知识：

求参数的取值范围宏观上有两种思路：一个是通过解不等式求解，一个是利用函数，通过解函数的值域求得参数范围

1、解不等式：通过题目条件建立关于参数的不等式，从而通过解不等式进行求解。常见的不等关系如下：

(1) 圆锥曲线上的点坐标的取值范围

① 椭圆（以 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 为例），则 $x \in [-a, a]$ ， $y \in [-b, b]$

② 双曲线：（以 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 为例），则 $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ （左支）
 $y \in \mathbb{R}$ （右支）

③ 抛物线：（以 $y^2 = 2px (p > 0)$ 为例），则 $x \in [0, +\infty)$

(2) 直线与圆锥曲线位置关系：若直线与圆锥曲线有两个公共点，则联立消元后的一元二次方程 $\Delta > 0$

(3) 点与椭圆（以 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 为例）位置关系：若点 (x_0, y_0) 在椭圆内，则

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$$

(4) 题目条件中的不等关系，有时是解决参数取值范围的关键条件

2、利用函数关系求得值域：题目中除了所求变量，还存在一个（或两个）辅助变量，通过条件可建立起变量间的等式，进而可将等式变形为所求变量关于辅助变量的函数，确定辅助变量的范围后，则可求解函数的值域，即为参数取值范围

(1) 一元函数：建立所求变量与某个辅助变量的函数关系，进而将问题转化为求一元函数的值域，常见的函数有：① 二次函数；② “对勾函数” $y = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ ；③ 反比例函数；

④ 分式函数。若出现非常规函数，则可考虑通过换元“化归”为常规函数，或者利用导数进行解决。

(2) 二元函数：若题目中涉及变量较多，通过代换消元最后得到所求参数与两个变量的表达式，则可通过均值不等式，放缩消元或数形结合进行解决。

3、两种方法的选择与决策：通常与题目所给的条件相关，主要体现在以下几点：

(1) 若题目中含有某个变量的范围，则可以优先考虑函数的方向，将该变量视为自变量，建立所求变量与自变量的函数关系，进而求得值域

(2) 若题目中含有某个表达式的范围(或不等式)，一方面可以考虑将表达式视为整体，看能否转为(1)的问题进行处理，或者将该表达式中的项用所求变量进行表示，从而建立起关于该变量的不等式，解不等式即可

二、典型例题：

例 1：已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， F_1 、 F_2 是其左右焦点，离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，且经过点 $(3,1)$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 若 A_1, A_2 分别是椭圆长轴的左右端点， Q 为椭圆上动点，设直线 A_1Q 斜率为 k ，且

$k \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ ，求直线 A_2Q 斜率的取值范围；

解：(1) $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \therefore a : b : c = \sqrt{3} : 1 : \sqrt{2}$

$\therefore$ 椭圆方程为： $\frac{x^2}{3b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 代入 $(3,1)$ 可得： $b^2 = 4$

$\therefore a^2 = 3b^2 = 12 \quad \therefore$ 椭圆方程为： $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) 由 (1) 可得： $A_1(-2\sqrt{3}, 0), A_2(2\sqrt{3}, 0)$ 设 $Q(x, y)$ ，

则 $k = \frac{y}{x + 2\sqrt{3}} \quad k_{A_2Q} = \frac{y}{x - 2\sqrt{3}}$

$\therefore k \cdot k_{A_2Q} = \frac{y}{x + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{y}{x - 2\sqrt{3}} = \frac{y^2}{x^2 - 12}$

$\because Q$ 在椭圆上 $\therefore \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3}(12 - x^2)$

$\therefore k \cdot k_{A_2Q} = \frac{y^2}{x^2 - 12} = -\frac{1}{3}$