微专题 59 新信息背景下的数列问题

含“新信息”背景的数列问题，以其难度通常位于试卷的最后一题。此类问题有以下几个难点：一是对于新的概念与规则，学生在处理时会有一个熟悉的过程，不易抓住信息的关键部分并用于解题之中，二是学生不易发现每一问所指向的知识点，传统题目通常在问法上就直接表明该用哪些知识进行处理，例如“求通项，求和”。但新信息问题所问的因为与新信息相关，所以要运用的知识隐藏的较深，不易让学生找到解题的方向。三是此类问题在设计时通常注重几问之间的联系，即前面问题的处理是为了最后一问做好铺垫。但学生不易发现其中联系，从而导致在处理最后一问时还要重整旗鼓，再加上可能要进行的分类讨论，解题难度陡然增加。本节通过 10 道例题来说明如何对这种“新信息”题目进行理解与分析，如何寻找到解题的突破口与思路

一、基础知识：

1、此类问题常涉及的知识点

（1）等差数列与等比数列的性质与求和公式

（2）数列的单调性

（3）放缩法证明不等式

（4）简单的有关整数的结论

（5）数学归纳法与反证法

2、解决此类问题的一些技巧：

（1）此类问题在设立问题中通常具有“环环相扣，层层递进”的特点，第（1）问让你熟悉所创设的定义与背景，第（2），（3）问便进行进一步的应用，那么在解题的过程中要注意解决前面一问中的过程与结论，因为这本身就是对“新信息”的诠释与应用。抓住“新信息”的特点，找到突破口，第（2）（3）问便可寻找到处理的思路

（2）尽管此类题目与传统的数列“求通项，求和”的风格不同，但其根基也是我们所学的一些基础知识与方法。所以在考虑问题时也要向一些基本知识点靠拢，弄清本问所考察的与哪个知识点有关，以便找到一些线索。

（3）在分类讨论时要遵循“先易后难”的原则，以相对简单的情况入手，可能在解决的过程中会发现复杂情况与该情况的联系，或者发现一些通用的做法与思路，使得复杂情况也有章可循。

二、典型例题：

例 1：定义：若对任意 $n\in N^*$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 都为完全平方数，则称数列 $\{a_n\}$ 为“完全平方数列”；特别的，若存在 $n\in N^*$，使得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 为完全平方数，则称数列 $\{a_n\}$ 为“部分平方数列”

（1）若数列 $\{a_n\}$ 为“部分平方数列”，且 $a_n=\begin{cases}2,n=1\\2^{n-1},n\geq 2\end{cases}\left(n\in N^*\right)$，求使数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 为完全平方数时 n 的值

（2）若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\left(n-t\right)^2\left(t\in N^*\right)$，那么数列 $\{|b_n|\}$ 是否为“完全平方数列”？若是，求出 t 的值；若不是，请说明理由

（3）试求所有为“完全平方数列”的等差数列

解：（1）思路：依题意可知先求出 S_n 的表达式，再根据表达式的特点寻找到完全平方式即可

$n=1$ 时，$S_n=2$

$n\geq 2$ 时，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=2+2+4+\cdots 2^{n-1}=2+\dfrac{2\left(2^{n-1}-1\right)}{2-1}=2^n$

$\therefore n=2k\left(k\in N^*\right)$ 时，$S_{2k}=2^{2k}=\left(2^k\right)^2$ 是完全平方数

（2）思路：若要观察 $\{|b_n|\}$ 的前 n 项和是否为完全平方数，则要先求出 b_n 的通项公式。由 T_n 可求得 $b_n=\begin{cases}\left(t-1\right)^2,n=1\\2n-2t-1,n\geq 2,n\in N\end{cases}$，因为 $T_n=\left(n-t\right)^2\left(t\in N^*\right)$ 为完全平方式，所以若 $\{|b_n|\}$ 有些项为 $\{b_n\}$ 中对应项的相反数，则再求和时很有可能不是完全平方数。根据 $n\geq 2$ 时，$b_n=2n-2t-1$，可知只有 $t=1$ 时，b_n 恒大于 0，即 $|b_n|=b_n$，所以 $\{|b_n|\}$ 是“完全平方数列”；$t\geq 2$ 时，$\{b_n\}$ 中存在部分项小于 0，可知 $\{|b_n|\}$ 不是“完全平方数列”

解：$n\geq 2$ 时，$b_n=T_n-T_{n-1}=2n-2t-1$

$n=1$ 时，$b_1=t_1=\left(t-1\right)^2$

$\therefore b_n=\begin{cases}\left(t-1\right)^2,n=1\\2n-2t-1,n\geq 2,n\in N\end{cases}$