微专题81 排列组合——寻找合适的模型

在排列组合问题中，有一些问题如果直接从题目入手，处理起来比较繁琐。但若找到解决问题的合适模型，或将问题进行等价的转化。便可巧妙的解决问题

一、典型例题：

例 1：设集合 A 由 n 个元素构成，即 $A=\left\{a_1,a_2,\cdots,a_n\right\}$，则 A 所有子集的个数为_______

思路：可将组成子集的过程视为 A 中的元素一个个进行选择，要不要进入到这个子集当中，所以第一步从 a_1 开始，有两种选择，同样后面的 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 都有两种选择，所以总数 $N=\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{n\text{个}}=2^n$ 个

答案：2^n

例 2：已知 $S=\left\{1,2,3,\cdots,40\right\}$，$A\subseteq S$ 且 A 中有三个元素，若 A 中的元素可构成等差数列，则这样的集合 A 共有（　　　）个

A. 460　　　　B. 760　　　　C. 380　　　　D. 190

思路：设 A 中构成等差数列的元素为 a,b,c，则有 $2b=a+c$，由此可得 a,c 应该同奇同偶，而当 a,c 同奇同偶时，则必存在中间项 b，所以问题转变为只需在 $1-40$ 中寻找同奇同偶数的情况。a,c 同为奇数的可能的情况为 C_{20}^2，同为偶数的可能的情况为 C_{20}^2，所以一共有 $2\cdot C_{20}^2=380$ 种

答案：C

例 3：设集合 $A\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right)|\,x_i\in\left\{-1,0,1\right\},i=\left\{1,2,3,4,5\right\}\right\}$，那么集合 A 中满足条件“$1\le\left|x_1\right|+\left|x_2\right|+\left|x_3\right|+\left|x_4\right|+\left|x_5\right|\le3$”的元素个数为（　　　）

A. 60　　　　B. 90　　　　C. 120　　　　D. 130

思路：因为 $\left|x_i\right|=0$ 或 $\left|x_i\right|=1$，所以若 $1\le\left|x_1\right|+\left|x_2\right|+\left|x_3\right|+\left|x_4\right|+\left|x_5\right|\le3$，则在 $x_i\left(i=1,2,3,4,5\right)$ 中至少有一个 $\left|x_i\right|=1$，且不多于 3 个。所以可根据 x_i 中含 0 的个数进行分类讨论。

① 五个数中有 2 个 0，则另外 3 个从 $1,-1$ 中取，共有方法数为 $N_1=C_5^2\cdot2^3$

② 五个数中有 3 个 0，则另外 2 个从 $1,-1$ 中取，共有方法数为 $N_2=C_5^3\cdot2^2$

③ 五个数中有 4 个 0，则另外 1 个从$1,-1$中取，共有方法数为$N_3=C_5^4\cdot 2$

所以共有$N=C_5^2\cdot 2^3+C_5^3\cdot 2^2+C_5^4\cdot 2=130$种

答案：D

例 4：设集合$A=\{1,2,3,\cdots,10\}$，设A的三元素子集中，三个元素的和分别为$a_1,a_2,\cdots,a_n$，求$a_1+a_2+\cdots+a_n$的值

思路：A的三元子集共有C_{10}^3个，若按照题目叙述一个个相加，则计算过于繁琐。所以不妨换个思路，考虑将这些子集中的$1,2,\cdots,10$各自加在一起，再进行汇总。则需要统计这C_{10}^3个子集中共含有多少个$1,2,\cdots,10$。以 1 为例，含1的子集可视为集合中有元素 1，剩下两个元素从 9 个数中任取，不同的选取构成不同的含 1 的子集，共有C_9^2个，所以和为$1\times C_9^2$，同理，含 2 的集合有C_9^2，其和为$2\times C_9^2$……，含 10 的集合有C_9^2个，其和为$10\times C_9^2$所以$a_1+a_2+\cdots+a_n=C_9^2\left(1+2+\cdots+10\right)=1980$

答案：1980

例 5：身高互不相同的 6 个人排成 2 横行 3 纵列，在第一行的每个人都比他同列的身后的个子矮，则所有不同的排法种数是多少

思路：虽然表面上是排队问题，但分析实质可发现，只需要将这六个人平均分成三组，并且进行排列，即可完成任务。至于高矮问题，在分组之后只需让个子矮的站在前面即可。从而将问题转化为分组问题。则$N=\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3=90$（种）

答案：90

例 6：四面体的顶点和各棱中点共 10 个点，则由这 10 点构成的直线中，有（　　）对异面直线

A. 450　　B. 441　　C. 432　　D. 423

思路：首先要了解一个结论，就是在一个三棱锥中存在 3 对异面直线，而不共面的四个点便可构成一个三棱锥，寻找不共面的四点只需用总数减去共面的四点即可。所以将问题转化为寻找这 10 个点中共面四点的情况。首先 4 个面上共面的情况共有$4\times C_6^4=60$，每条棱与对棱中点共面情况共有 6 种，连结中点所成的中位线中有 3 对平行关系，所以共面，所以四点共