

微专题 89 比赛与闯关问题

一、基础知识：

1、常见的比赛规则

（1） n 局 m 胜制：这种规则的特点为一旦某方获得 m 次胜利即终止比赛。所以若比赛提前结束，则一定在最后一次比赛中某方达到 m 胜。

例如：甲、乙两队举行排球比赛，比赛采取 5 局 3 胜制，已知甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$ ，求甲以 3:1 获胜的概率：

解：本题不能认为“四局中甲赢得三局”，从而 $P = C_4^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}$ ，因为如果前三局连胜，

则结束比赛而不会开始第四局，所以若比分为 3:1，则第四局甲获胜，前三局的比分为 2:1，

$$\text{所以 } P = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{24}{81}$$

（2）连胜制：规定某方连胜 m 场即终止比赛，所以若提前结束比赛，则最后 m 场连胜且之前没有达到 m 场连胜。

例如：甲、乙两队举行比赛，比赛共有 7 局，若有一方连胜 3 局，则比赛立即终止。已知甲获胜的概率为 $\frac{3}{4}$ ，求甲在第 5 局终止比赛并获胜的概率

解：若第 5 局比赛结束，根据连胜三局终止比赛的规则，可知甲在第 3,4,5 局获胜，且第二局失败（否则若第二局获胜，则第四局就达到三连胜），第一局无论胜负不影响获胜结果。所以

$$P = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{256}$$

（3）比分差距制：规定某方比对方多 m 分即终止比赛，此时首先根据比赛局数确定比分，在得分过程中要注意使两方的分差小于 m

（4）“一票否决制”：在比赛的过程中，如果在某一阶段失败，则被淘汰。此类问题要注意若达到第 m 阶段，则意味着前 $(m-1)$ 个阶段均能通关

2、解答此类题目的技巧：

（1）善于引入变量表示事件：可用“字母+变量角标”的形式表示事件“第几局胜利”。例如： A_i 表示“第 i 局比赛胜利”，则 $\overline{A_i}$ 表示“第 i 局比赛失败”。

（2）善于使用对立事件求概率：若所求事件含情况较多，可以考虑求对立事件的概率，再用

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$ 解出所求事件概率。在处理离散性随机变量分布列时，也可利用概率和为 1 的特点，先求出包含情况较少的事件的概率，再间接求出包含情况较多的事件概率

二、典型例题：

例 1：某项选拔共有三轮考核，每轮设有一个问题，回答问题正确者进入下一轮考核，否则即被淘汰。已知某选手能正确回答第一、二、三轮的问题的概率分别为 $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$ ，且各轮问题能否正确回答互不影响。

(1) 求该选手被淘汰的概率；

(2) 记该选手在考核中回答问题的个数为 ξ ，求随机变量 ξ 的分布列与数学期望。

(1) 思路：依题可知，比赛规则为：只要打错一个即被淘汰，如果从问题的正面考虑，则要考虑到是第几轮被淘汰，情况较多。但此问题的反面为“答对所有问题”，概率易于表示，所以考虑利用对立事件进行求解

设 A_i 为“选手正确回答第 i 轮问题”，事件 A 为“选手被淘汰”

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(A_1 A_2 A_3) = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{101}{125}$$

(2) 思路： ξ 可取的值为 1, 2, 3，可知若想多答题，则需要前面的问题均要答对，所以 $\xi = 1$ 时，则第一题答错； $\xi = 2$ 时，则第一题答对且第二题答错（若第二题答对则需要答第三题）； $\xi = 3$ 时，则第一题答对且第二题答对（第三题无论是否正确，均已答三题），分别求出概率即可

解： ξ 可取的值为 1, 2, 3

$$P(\xi = 1) = \frac{1}{5} \quad P(\xi = 2) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$$

$$P(\xi = 3) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{12}{25}$

$$\therefore E\xi = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{8}{25} + 3 \times \frac{12}{25} = \frac{57}{25}$$