

微专题 98 含新信息问题的求解

一、基础知识：

所谓“新信息背景问题”，是指题目中会介绍一个“课本外的知识”，并说明它的规则，然后按照这个规则去解决问题。它主要考察学生接受并运用新信息解决问题的能力。这类问题有时提供的信息比较抽象，并且能否读懂并应用“新信息”是解决此类问题的关键。在本文中主要介绍处理此类问题的方法与技巧

1、读取“新信息”的步骤

- (1) 若题目中含有变量，则要先确定变量的取值范围
- (2) 确定新信息所涉及的知识背景，寻找与所学知识的联系
- (3) 注意信息中的细节描述，如果是新的运算要注意确定该运算是否满足交换律
- (4) 把对“新信息”的理解应用到具体问题中，进行套用与分析。

2、理解“新信息”的技巧与方法

- (1) 可通过“举例子”的方式，将抽象的定义转化为具体的简单的应用，从而加深对新信息的理解
- (2) 可用自己的语言转述“新信息”所表达的内容，如果能够清晰描述，那么说明对此信息理解的较为透彻。
- (3) 发现新信息与所学知识的联系，并从描述中体会信息的本质特征与规律
- (4) 如果“新信息”是书本知识上某个概念的推广，则关注此信息与原概念的不同之处，以及在什么情况下可以使用原概念。

二、典型例题

例 1: 设 P, Q 是两个集合，定义集合 $P-Q = \{x | x \in P \text{ 且 } x \notin Q\}$ ，如果 $P = \{x | \log_2 x < 1\}$ ， $Q = \{x | |x-2| < 1\}$ ，则 $P-Q$ 等于 ()

- A. $\{x | 0 < x < 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ D. $\{x | 2 \leq x < 3\}$

思路：依 $P-Q = \{x | x \in P \text{ 且 } x \notin Q\}$ 可知该集合为在 P 中且不属于 Q 中的元素组成，或者可以理解为 P 集合去掉 $P \cap Q$ 的元素后剩下的集合。先解出 P, Q 中的不等式。 $P: \log_2 x < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$ ， $Q: |x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$ ，所以 $P \cap Q = (1, 2)$ ，从而可得： $P-Q = (0, 1]$

答案：B

例 2: $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义。对于给定的正数 K ，定义函数

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq K \\ K, & f(x) > K \end{cases}$$

取函数 $f(x) = 2 + x - e^x$ 。若对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ ，恒有 $f_k(x) = f(x)$ ，则 ()

- A. K 的最大值为 2 B. K 的最小值为 2 C. K 的最大值为 1 D. K 的最小值为 1

思路：由所给分式函数 $f_k(x)$ 可知，若 $f(x) \leq K$ ，则取 $f(x)$ ，如果 $f(x) > K$ ，就取 K ，由这个规则可知，若 $f_k(x) = f(x)$ 恒成立，意味着 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ，均有 $f(x) \leq K$ 恒成立，从而将问题转化为恒成立问题，即 $K \geq f(x)_{\max}$ ，下面求 $f(x)$ 的最大值： $f'(x) = 1 - e^x$ ，可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增，在 $(0, +\infty)$ 单调递减，所以 $f(x)_{\max} = f(0) = 1$ ，从而 $K \geq 1$ ，即 K 的最小值为 1

答案：D

例 3: 设集合 $S = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ ，在 S 上定义运算 $\oplus$ 为： $A_i \oplus A_j = A_k$ ，其中 k 为 $i + j$ 被 4 除的余数， $i, j = 0, 1, 2, 3$ ，则满足关系式 $(x \oplus x) \oplus A_2 = A_0$ 的 $x (x \in S)$ 的个数为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

思路：本题的关键在于读懂规则，“ $\oplus$ ”运算的结果其实与角标和除以 4 的余数相关，如果理解文字叙述较为抽象不如举几个例子，例如： $A_1 \oplus A_3$ ，按照要求， $(1+3)$ 除以 4 的余数为 0，所以 $A_1 \oplus A_3 = A_0$ 。掌握规律后再看所求关系式：要求得 x ，则需要先解出 $(x \oplus x)$ ，将其视为一个整体 A_m ，可知 $A_m \oplus A_2 = A_0$ ，即 $(m+2)$ 除以 4 的余数为 0，可推断 $m = 2$ ，即 $x \oplus x = A_2$ ，不妨设 $x = A_n$ ，即 $(n+n)$ 除以 4 的余数为 2，则 n 的值为 1, 3，所以 $x = A_1$ 或者 $x = A_3$ ，共有两个解

答案：C

例 4: 定义两个平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的一种运算 $\vec{a} \otimes \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ ，其中 θ 为 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角，对于这种运算，给出以下结论：① $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{b} \otimes \vec{a}$ ；② $\lambda(\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \otimes \vec{b}$ ；③