

微专题 83 特殊值法解决二项式展开系数问题

一、基础知识:

- 1、含变量的恒等式: 是指无论变量在已知范围内取何值, 均可使等式成立。所以通常可对变量赋予特殊值得到一些特殊的等式或性质
- 2、二项式展开式与原二项式呈恒等关系, 所以可通过对变量赋特殊值得到有关系数(或二项式系数)的等式
- 3、常用赋值举例:

$$(1) \text{ 设 } (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n,$$

$$\textcircled{1} \text{ 令 } a=b=1, \text{ 可得: } 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$$

$$\textcircled{2} \text{ 令 } a=1, b=-1, \text{ 可得: } 0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n, \text{ 即:}$$

$$C_n^0 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^{n-1} \quad (\text{假设 } n \text{ 为偶数}), \text{ 再结合 } \textcircled{1} \text{ 可得:}$$

$$C_n^0 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$(2) \text{ 设 } f(x) = (2x+1)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$\textcircled{1} \text{ 令 } x=1, \text{ 则有: } a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (2 \times 1 + 1)^n = f(1), \text{ 即展开式系数和}$$

$$\textcircled{2} \text{ 令 } x=0, \text{ 则有: } a_0 = (2 \times 0 + 1)^n = f(0), \text{ 即常数项}$$

$$\textcircled{3} \text{ 令 } x=-1, \text{ 设 } n \text{ 为偶数, 则有: } a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_n = (-1 \times 2 + 1)^n = f(-1)$$

$$\Rightarrow (a_0 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) = f(-1),$$

即偶次项系数和与奇次项系数和的差

由 $\textcircled{1}\textcircled{3}$ 即可求出 $(a_0 + a_2 + \cdots + a_n)$ 和 $(a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1})$ 的值

二、典型例题:

例 1: 已知 $(3x-1)^8 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_8 x^8$, 则 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 的值为_____

思路: 观察发现展开式中奇数项对应的 x 指数幂为奇数, 所以考虑令 $x=1, x=-1$, 则偶数项

相同, 奇数项相反, 两式相减即可得到 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 的值

$$\text{解: 令 } x=1 \text{ 可得: } 2^8 = a_0 + a_1 + \cdots + a_8 \quad \textcircled{1}$$

令 $x = -1$ 可得: $4^8 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_8$ ②

①-②可得: $2^8 - 4^8 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = \frac{1}{2}(2^8 - 4^8)$

答案: $\frac{1}{2}(2^8 - 4^8)$

例 2 : 已知 $(x^2 + 1)(x - 2)^9 = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + \cdots + a_{11}(x - 1)^{11}$, 则

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{11}$ 的值为 ()

- A. 0 B. 2 C. 255 D. -2

思路: 本题虽然恒等式左侧复杂, 但仍然可通过对 x 赋予特殊值得到系数的关系式, 观察所求式子特点可令 $x = 2$, 得到 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{11} = 0$, 只需再求出 a_0 即可. 令 $x = 1$ 可得 $a_0 = -2$,

所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = 2$

答案: B

例 3: 设 $(2x + \sqrt{2})^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2$ 的值为 ()

- A. 16 B. -16 C. 1 D. -1

思路: 所求 $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4)$, 在

恒等式中令 $x = 1$ 可得: $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (2 + \sqrt{2})^4$, 令 $x = -1$ 时

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = (2 - \sqrt{2})^4$, 所以

$(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2 = (2 + \sqrt{2})^4 (2 - \sqrt{2})^4 = 16$

答案: A

例 4: 若 $(2 - 3x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5|$ 等于 ()

- A. 5^5 B. -1 C. 2^5 D. -2^5

思路: 虽然 $(2 - 3x)^5$ 展开式的系数有正有负, 但 $(2 - 3x)^5$ 与 $(2 + 3x)^5$ 对应系数的绝对值相同,

且 $(2 + 3x)^5$ 均为正数. 所以只需计算 $(2 + 3x)^5$ 展开的系数和即可. 令 $x = 1$, 可得系数和为 5^5 ,