

## 微专题 85 几何概型

### 一、基础知识：

#### 1、几何概型：

每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称为几何概型

#### 2、对于一项试验，如果符合以下原则：

- (1) 基本事件的个数为无限多个
- (2) 基本事件发生的概率相同

则可通过建立几何模型，利用几何概型计算事件的概率

#### 3、几何概型常见的类型，可分为三个层次：

(1) 以几何图形为基础的题目：可直接寻找事件所表示的几何区域和总体的区域，从而求出比例即可得到概率。

(2) 以数轴，坐标系为基础的题目：可将所求事件转化为数轴上的线段（或坐标平面的可行域），从而可通过计算长度（或面积）的比例求的概率（将问题转化为第（1）类问题）

(3) 在题目叙述中，判断是否运用几何概型处理，并确定题目中所用变量个数。从而可依据变量个数确定几何模型：通常变量的个数与几何模型的维度相等：一个变量→数轴，两个变量→平面直角坐标系，三个变量→空间直角坐标系。从而将问题转化成为第（2）类问题求解

### 二、典型例题：

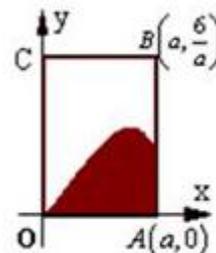
例 1：已知函数  $f(x) = x^2 - x - 2, x \in [-5, 5]$ ，在定义域内任取一点  $x_0$ ，使  $f(x_0) \leq 0$  的概率是（ ）

- A.  $\frac{1}{10}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{3}{10}$                       D.  $\frac{4}{5}$

思路：先解出  $f(x_0) \leq 0$  时  $x_0$  的取值范围： $x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$ ，从而在数轴上  $(-1, 2)$  区间长度占  $[-5, 5]$  区间长度的比例即为事件发生的概率，所以  $P = \frac{3}{10}$

答案：C

例 2：如图，矩形  $OABC$  内的阴影部分是由曲线



$f(x) = \sin x (x \in (0, \pi))$  及直线  $x = a (a \in (0, \pi))$  与  $x$  轴围成，向矩形  $OABC$  内随机投掷一点，若落在阴影部分的概率为  $\frac{1}{4}$ ，则  $a$  的值是（ ）

- A.  $\frac{7\pi}{12}$       B.  $\frac{2\pi}{3}$       C.  $\frac{3\pi}{4}$       D.  $\frac{5\pi}{6}$

思路：落在阴影部分的概率即为阴影部分面积与长方形面积的比值

长方形的面积  $S = a \cdot \frac{6}{a} = 6$ ，阴影面积  $S' = \int_0^a \sin x dx = -\cos x \Big|_0^a = 1 - \cos a$ ，所以有

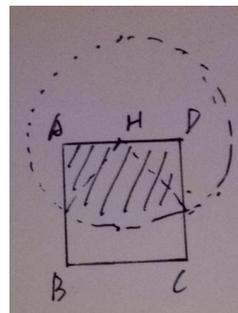
$$P = \frac{S'}{S} = \frac{1 - \cos a}{6} = \frac{1}{4}, \text{ 可解得 } \cos a = -\frac{1}{2}, \text{ 从而 } a = \frac{2\pi}{3}$$

答案：B

例 3：已知正方形  $ABCD$  的边长为 2， $H$  是边  $DA$  的中点，在正方形  $ABCD$  内部随机取一点  $P$ ，则满足  $|PH| < \sqrt{2}$  的概率为（ ）

- A.  $\frac{\pi}{8}$       B.  $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$       C.  $\frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$

思路： $|PH| < \sqrt{2}$  可理解为以  $H$  为圆心， $\sqrt{2}$  为半径的圆的内部，通过作图可得概率为阴影部分面积所占正方形面积的比例。可将阴影部分拆为一个扇形与两个直角三角形，可计算其面积为  $S' = \frac{\pi}{2} + 1$ ，正

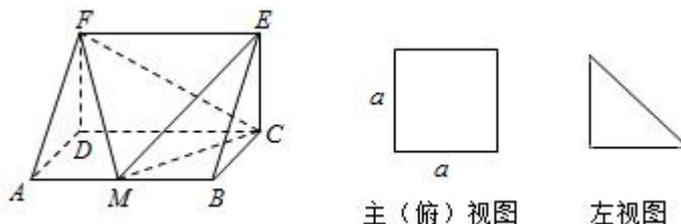


方形面积  $S = 2^2 = 4$ ，所以  $P = \frac{S'}{S} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

答案：B

小炼有话说：到某定点的距离等于（或小于）定长的轨迹为圆（或圆的内部），所以从  $|PH| < \sqrt{2}$  和  $H$  为定点便可确定  $P$  所在的圆内

例 4：一个多面体的直观图和三视图所示， $M$  是  $AB$  的中点，一只蝴蝶在几何体  $ADF - BCE$  内自由飞翔，由它飞入几何体  $F - AMCD$  内的概率为（ ）



- A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{2}{3}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{1}{2}$