

微专题 68 圆锥曲线的离心率问题

离心率是圆锥曲线的一个重要几何性质，一方面刻画了椭圆，双曲线的形状，另一方面也体现了参数 a, c 之间的联系。

一、基础知识：

1、离心率公式： $e = \frac{c}{a}$ （其中 c 为圆锥曲线的半焦距）

(1) 椭圆： $e \in (0, 1)$

(2) 双曲线： $e \in (1, +\infty)$

2、圆锥曲线中 a, b, c 的几何性质及联系

(1) 椭圆： $a^2 = b^2 + c^2$,

① $2a$ ：长轴长，也是同一点的焦半径的和： $PF_1 + PF_2 = 2a$

② $2b$ ：短轴长

③ $2c$ ：椭圆的焦距

(2) 双曲线： $c^2 = b^2 + a^2$

① $2a$ ：实轴长，也是同一点的焦半径差的绝对值： $|PF_1 - PF_2| = 2a$

② $2b$ ：虚轴长

③ $2c$ ：双曲线的焦距

3、求离心率的方法：求椭圆和双曲线的离心率主要围绕寻找参数 a, b, c 的比例关系（只需找出其中两个参数的关系即可），方法通常有两个方向：

(1) 利用几何性质：如果题目中存在焦点三角形（曲线上的点与两焦点连线组成的三角形），那么可考虑寻求焦点三角形三边的比例关系，进而两条焦半径与 a 有关，另一条边为焦距。从而可求解

(2) 利用坐标运算：如果题目中的条件难以发掘几何关系，那么可考虑将点的坐标用 a, b, c 进行表示，再利用条件列出等式求解

2、离心率的范围问题：在寻找不等关系时通常可从以下几个方面考虑：

(1) 题目中某点的横坐标（或纵坐标）是否有范围要求：例如椭圆与双曲线对横坐标的范围有要求。如果问题围绕在“曲线上存在一点”，则可考虑该点坐标用 a, b, c 表示，且点坐标的范围就是求离心率范围的突破口

(2) 若题目中有一个核心变量，则可以考虑离心率表示为某个变量的函数，从而求该函数的值域即可

(3) 通过一些不等关系得到关于 a, b, c 的不等式，进而解出离心率

注：在求解离心率范围时要注意圆锥曲线中对离心率范围的初始要求：椭圆： $e \in (0, 1)$ ，双

曲线： $e \in (1, +\infty)$

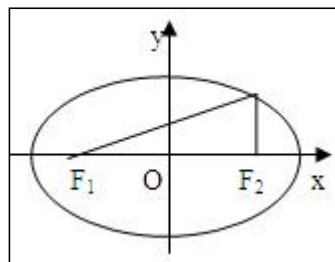
二、典型例题：

例1：设 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，点 P 在椭圆 C 上，线段

PF_1 的中点在 y 轴上，若 $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$ ，则椭圆的离心率为

()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$



思路：本题存在焦点三角形 $\triangle PF_1F_2$ ，由线段 PF_1 的中点在 y 轴

上， O 为 F_1F_2 中点可得 $PF_2 \parallel y$ 轴，从而 $PF_2 \perp F_1F_2$ ，又因为 $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$ ，则直角

三角形 $\triangle PF_1F_2$ 中， $|PF_1| : |PF_2| : |F_1F_2| = 2 : 1 : \sqrt{3}$ ，且 $2a = |PF_1| + |PF_2|$ ， $2c = |F_1F_2|$ ，所

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{|F_1F_2|}{|PF_1| + |PF_2|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

答案：A

小炼有话说：在圆锥曲线中，要注意 O 为 F_1F_2 中点是一个隐含条件，如果图中存在其它中点，则有可能与 O 搭配形成三角形的中位线。

例2：椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2\sqrt{3})$ 与渐近线为 $x \pm 2y = 0$ 的双曲线有相同的焦点 F_1, F_2 ， P

为它们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ，则椭圆的离心率为_____

思路：本题的突破口在于椭圆与双曲线共用一对焦点，设 $F_1F_2 = 2c$ ，在双曲线中，

$$\frac{b'}{a'} = \frac{1}{2} \Rightarrow a' : b' : c = 2 : 1 : \sqrt{5}，不妨设 P 在第一象限，则由椭圆定义可得：$$

$$PF_1 + PF_2 = 4\sqrt{3}，由双曲线定义可得：PF_1 - PF_2 = 2a' = \frac{4}{\sqrt{5}}c，因为 \angle F_1PF_2 = 90^\circ，$$

$$\therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4c^2 而 |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = \frac{(PF_1 + PF_2)^2 + (PF_1 - PF_2)^2}{2}$$

$$代入可得：48 + \frac{16c^2}{5} = 8c^2 \Rightarrow c = \sqrt{10} \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

答案： $\frac{\sqrt{30}}{6}$