

微专题 55 数列中的不等关系

一、基础知识:

1、在数列中涉及到的不等关系通常与数列的最值有关，而要求的数列中的最值项，要依靠数列的单调性，所以判断数列的单调性往往是此类问题的入手点

2、如何判断数列的单调性:

(1) 函数角度: 从通项公式入手，将其视为关于 n 的函数，然后通过函数的单调性来判断数列的单调性。由于 $n \in N^*$ ，所以如果需要用到导数，首先要构造一个与通项公式形式相同，但定义域为 $(0, +\infty)$ 的函数，得到函数的单调性后再结合 $n \in N^*$ 得到数列的单调性

(2) 相邻项比较: 在通项公式不便于直接分析单调性时，可考虑进行相邻项的比较得出数列的单调性，通常的手段就是作差（与 0 比较，从而转化为判断符号问题）或作商（与 1 比较，但要求是正项数列）

3、用数列的眼光去看待有特征的一列数: 在解数列题目时，不要狭隘的认为只有题目中的 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是数列，实质上只要是有规律的一排数，都可以视为数列，都可以运用数列的知识来进行处理。比如: 含 n 的表达式就可以看作是一个数列的通项公式; 某数列的前 n 项和 S_n 也可看做数列 $\{S_n\}: S_1, S_2, \dots, S_n$ 等等。

4、对于某数列的前 n 项和 $\{S_n\}: S_1, S_2, \dots, S_n$ ，在判断其单调性时可以考虑从解析式出发，用函数的观点解决。也可以考虑相邻项比较。在相邻项比较的过程中可发现: $a_n = S_n - S_{n-1}$ ，所以 $\{S_n\}$ 的增减由所加项 a_n 的符号确定。进而把问题转化成为判断 a_n 的符号问题

二、典型例题

例 1: 已知数列 $\{a_n\}, a_1 = 1$ ，前 n 项和 S_n 满足 $nS_{n+1} - (n+3)S_n = 0$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 $c_n = 2^n \left(\frac{n}{a_n} - \lambda \right)$ ，若数列 $\{c_n\}$ 是单调递减数列，求实数 λ 的取值范围

解: (1) $nS_{n+1} - (n+3)S_n = 0 \Rightarrow \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+3}{n}$

$$\therefore \frac{S_n}{S_{n-1}} \cdot \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \cdot \frac{S_{n-2}}{S_{n-3}} \cdots \frac{S_2}{S_1} = \frac{n+2}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} \cdots \frac{4}{1}$$

$$\therefore \frac{S_n}{S_1} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$$

$$\because S_1 = a_1 = 1 \quad \therefore S_n = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$$

$$\therefore n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2}$$

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 符合上式

$$\therefore a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) 思路: 由 (1) 可得: $c_n = 2^n \left(\frac{2}{n+1} - \lambda \right)$, 由已知 $\{c_n\}$ 为单调递减数列可得 $c_{n+1} < c_n$ 对

$\forall n \in N^*$ 均成立, 所以代入 $\{c_n\}$ 通项公式得到关于 n, λ 的不等式 $\lambda > \frac{4}{n+2} - \frac{2}{n+1}$, 即只需

$\lambda > \left(\frac{4}{n+2} - \frac{2}{n+1} \right)_{\max}$, 构造函数或者数列求出 $\left(\frac{4}{n+2} - \frac{2}{n+1} \right)$ 的最大值即可

$$\text{解: } c_n = 2^n \left(\frac{n}{a_n} - \lambda \right) = 2^n \left(\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} - \lambda \right) = 2^n \left(\frac{2}{n+1} - \lambda \right)$$

$\because \{c_n\}$ 是递减数列 $\therefore \forall n \in N^*, c_{n+1} < c_n$

$$\text{即 } 2^{n+1} \left(\frac{2}{n+2} - \lambda \right) < 2^n \left(\frac{2}{n+1} - \lambda \right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{n+2} - 2\lambda < \frac{2}{n+1} - \lambda \Rightarrow \lambda > \frac{4}{n+2} - \frac{2}{n+1}$$

$$\therefore \text{只需 } \lambda > \left(\frac{4}{n+2} - \frac{2}{n+1} \right)_{\max}$$

① 构造函数: 设 $f(x) = \frac{4}{x+2} - \frac{2}{x+1} (x \geq 1)$