

微专题 58 数学归纳法

一、基础知识：

1、数学归纳法适用的范围：关于正整数 n 的命题（例如数列，不等式，整除问题等），则可以考虑使用数学归纳法进行证明

2、第一数学归纳法：通过假设 $n = k$ 成立，再结合其它条件去证 $n = k + 1$ 成立即可。证明的步骤如下：

（1）归纳验证：验证 $n = n_0$ （ n_0 是满足条件的最小整数）时，命题成立

（2）归纳假设：假设 $n = k$ （ $k \geq n_0, n \in N$ ）成立，证明当 $n = k + 1$ 时，命题也成立

（3）归纳结论：得到结论： $n \geq n_0, n \in N$ 时，命题均成立

3、第一归纳法要注意的地方：

（1）数学归纳法所证命题不一定从 $n = 1$ 开始成立，可从任意一个正整数 n_0 开始，此时归纳验证从 $n = n_0$ 开始

（2）归纳假设中，要注意 $k \geq n_0$ ，保证递推的连续性

（3）归纳假设中的 $n = k$ ，命题成立，是证明 $n = k + 1$ 命题成立的重要条件。在证明的过程中要注意寻找 $n = k + 1$ 与 $n = k$ 的联系

4、第二数学归纳法：在第一数学归纳法中有一个细节，就是在假设 $n = k$ 命题成立时，可用的条件只有 $n = k$ ，而不能默认其它 $n \leq k$ 的时依然成立。第二数学归纳法是对第一归纳法的补充，将归纳假设扩充为假设 $n \leq k$ ，命题均成立，然后证明 $n = k + 1$ 命题成立。可使用的条件要比第一归纳法多，证明的步骤如下：

（1）归纳验证：验证 $n = n_0$ （ n_0 是满足条件的最小整数）时，命题成立

（2）归纳假设：假设 $n \leq k$ （ $k \geq n_0, n \in N$ ）成立，证明当 $n = k + 1$ 时，命题也成立

（3）归纳结论：得到结论： $n \geq n_0, n \in N$ 时，命题均成立

二、典型例题

例 1：已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 2$ ，公比 $q = 3$ ，设 S_n 是它的前 n 项和，求证：

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} \leq \frac{3n+1}{n}$$

思路：根据等比数列求和公式可化简所证不等式： $3^n \geq 2n+1$ ， $n=k$ 时，不等式为

$3^k \geq 2k+1$ ；当 $n=k+1$ 时，所证不等式为 $3^{k+1} \geq 2k+3$ ，可明显看到 $n=k$ 与 $n=k+1$ 中，

两个不等式的联系，从而想到利用数学归纳法进行证明

证明： $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = 3^n - 1$ ，所证不等式为： $\frac{3^{n+1} - 1}{3^n - 1} \leq \frac{3n+1}{n}$

$$\therefore n(3^{n+1} - 1) \leq (3n+1)(3^n - 1)$$

$$\Leftrightarrow n \cdot 3^{n+1} - n \leq n \cdot 3^{n+1} + 3^n - 3n - 1$$

$\Leftrightarrow 3^n \geq 2n+1$ ，下面用数学归纳法证明：

(1) 验证： $n=1$ 时，左边=右边，不等式成立

(2) 假设 $n=k$ ($k \geq 1, k \in N$) 时，不等式成立，则 $n=k+1$ 时，

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq 3(2k+1) = 6k+3 > 2(k+1)+1$$

所以 $n=k+1$ 时，不等式成立

$$\therefore \forall n \in N^*, \text{ 均有 } \frac{S_{n+1}}{S_n} \leq \frac{3n+1}{n}$$

小炼有话说：数学归纳法的证明过程，关键的地方在于寻找所证 $n=k+1$ 与条件 $n=k$ 之间的联系，一旦找到联系，则数学归纳法即可使用

例 2（2015，和平模拟）：已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$ ，其前 n 项和 $S_n > 1$ ，且

$$S_n = \frac{1}{6}(a_n + 1)(a_n + 2), n \in N^*$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 $b_n = \log_2 \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)$ ，并记 T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求证：