

微专题 78 圆锥曲线中的定值问题

一、基础知识：

所谓定值问题，是指虽然圆锥曲线中的某些要素（通常可通过变量进行体现）有所变化，但在变化过程中，某个量的值保持不变即为定值。

1、常见定值问题的处理方法：

（1）确定一个（或两个）变量为核心变量，其余量均利用条件用核心变量进行表示

（2）将所求表达式用核心变量进行表示（有的甚至就是核心变量），然后进行化简，看能否得到一个常数。

2、定值问题的处理技巧：

（1）对于较为复杂的问题，可先采用特殊位置（例如斜率不存在的直线等）求出定值，进而给后面一般情况的处理提供一个方向。

（2）在运算过程中，尽量减少所求表达式中变量的个数，以便于向定值靠拢

（3）巧妙利用变量间的关系，例如点的坐标符合曲线方程等，尽量做到整体代入，简化运算

二、典型例题：

例 1：已知双曲线的中心在原点，对称轴为坐标轴，一条渐近线方程为 $y = \frac{4}{3}x$ ，右焦点 $F(5,0)$ ，

双曲线的实轴为 A_1A_2 ， P 为双曲线上一点（不同于 A_1, A_2 ），直线 A_1P, A_2P 分别于直线

$l: x = \frac{9}{5}$ 交于 M, N 两点

（1）求双曲线的方程

（2）试判断 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN}$ 是否为定值，若为定值，求出该值；若不为定值，请说明理由

解：（1）由 $F(5,0)$ 可得 $c = 5$ ，且焦点在 x 轴上

所以设双曲线方程为： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，则渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ 由 $a^2 + b^2 = c^2 = 25$ 解得： $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$

$\therefore$ 双曲线方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

（2）由（1）可得： $A_1(-3,0), A_2(3,0)$ ，设 $P(x_0, y_0)$

$$\text{设 } A_1P: y = k_1(x+3), \text{ 联立方程 } \begin{cases} y = k_1(x+3) \\ x = \frac{9}{5} \end{cases} \text{ 解得: } M\left(\frac{9}{5}, \frac{24}{5}k_1\right)$$

$$\text{同理: 设 } A_2P: y = k_2(x-3), \text{ 联立方程 } \begin{cases} y = k_2(x-3) \\ x = \frac{9}{5} \end{cases} \text{ 可得: } N\left(\frac{9}{5}, -\frac{6}{5}k_2\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{FM} = \left(-\frac{16}{5}, \frac{24k_1}{5}\right), \overrightarrow{FN} = \left(-\frac{16}{5}, -\frac{6k_2}{5}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = \frac{256}{25} - \frac{144k_1k_2}{25}$$

下面考虑计算 k_1k_2 的值

$$\because k_1 = \frac{y_0}{x_0+3}, k_2 = \frac{y_0}{x_0-3} \quad \therefore k_1k_2 = \frac{y_0^2}{x_0^2-9}$$

$$\because P(x_0, y_0) \text{ 在双曲线上} \quad \frac{x_0^2}{9} - \frac{y_0^2}{16} = 1 \Rightarrow y_0^2 = \frac{16x_0^2}{9} - 16 = \frac{16}{9}(x_0^2 - 9)$$

$$\therefore k_1k_2 = \frac{y_0^2}{x_0^2-9} = \frac{16}{9}$$

$$\therefore \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = \frac{256}{25} - \frac{144}{25} \cdot \frac{16}{9} = 0$$

所以 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN}$ 为定值

$$\text{例 2: 已知椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 的离心率为 } \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 且过点 } \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(1) 求椭圆方程

(2) 设不过原点 O 的直线 $l: y = kx + m (k \neq 0)$, 与该椭圆交于 P, Q 两点, 直线 OP, OQ 的

斜率依次为 k_1, k_2 , 且满足 $4k = k_1 + k_2$, 试问: 当 k 变化时, m^2 是否为定值? 若是, 求出此定值, 并证明你的结论; 若不是, 请说明理由

$$\text{解: (1) 由 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 可得: } a:b:c = 2:1:\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 代入 } \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 可得:}$$