

微专题 90 取球问题

一、基础知识：

在很多随机变量的题目中，常以“取球”作为故事背景，通过对“取球”提出不同的要求，来考察不同的模型，常见的模型及处理方式如下：

- 1、独立重复试验模型：关键词“可放回的抽取”，即下一次的取球试验与上一次的相同。
- 2、超几何分布模型：关键词“不放回的抽取”
- 3、与条件概率相关：此类问题通常包含一个抽球的规则，并一次次的抽取，要注意前一次的结果对后一步抽球的影响
- 4、古典概型：要注意虽然题目中会说明“相同的”小球，但是为了能使用古典概型（保证基本事件为等可能事件），通常要将“相同的”小球视为“不同的”元素，在利用排列组合知识进行分子分母的计数。
- 5、数字问题：在小球上标注数字，所涉及的问题与数字相关（奇，偶，最大，最小等），在解决此类问题时，要将数字模型转化为“怎样取球”的问题，从而转化为前几个类型进行求解。

二、典型例题：

例 1：一袋中有 6 个黑球，4 个白球

- (1) 不放回地依次取出 3 个球，已知第一次取出的是白球，求第三次取到黑球的概率
- (2) 有放回地依次取出 3 个球，已知第一次取出的是白球，求第三次取到黑球的概率
- (3) 有放回的依次取出 3 个球，求取到白球个数 X 的分布列，期望和方差

(1) 思路：因为是不放回的取球，所以后面取球的情况受到前面的影响，要使用条件概率相关公式进行计算。第一次已经取到白球，所以剩下 6 个黑球，3 个白球；若第二次取到黑球，则第三次取到黑球的概率为 $\frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8}$ ，若第二次取到白球，则第三次取到黑球的概率为 $\frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8}$ ，从而能够得到第三次取到黑球的概率

解：设事件 A 为“不放回取球，第一次取出白球时，第三次取到黑球”

$$\therefore P(A) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$$

(2) 思路：因为是有放回的取球，所以每次取球的结果互不影响，属于独立重复试验模型，所以第三次取球时依然是 6 个黑球，3 个白球，取得黑球的概率为 $\frac{6}{9}$

解：设事件 B 为“有放回取球，第一次取出白球时，第三次取到黑球”

$$\therefore P(B) = \frac{2}{3}$$

(3) 思路：本问依然属于独立重复试验模型， X 的取值为 0,1,2,3，则 X 符合二项分布，即

$X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$ ，所以可通过二项分布的概率计算公式求得概率，得到分布列

解： X 的取值为 0,1,2,3，依题意可得： $X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$

$$\therefore P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} \quad P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{54}{125}$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{36}{125} \quad P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$$\therefore X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$$

$$\therefore EX = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5} \quad DX = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{25}$$

例 2：已知甲盒内有大小相同的 1 个红球和 3 个黑球，乙盒内有大小相同的 3 个红球和 3 个黑球，现从甲、乙两个盒内各任取 2 个球

(1) 求取出的 4 个球中没有红球的概率

(2) 求取出的 4 个球中恰有 1 个红球的概率

(3) 设 ξ 为取出的 4 个球中红球的个数，求 ξ 的分布列和数学期望

思路：本题这三问的关键在于所取球中红球的个数，考虑红球个数来自于两个盒内拿出红球个数的总和，所以可将红球总数进行分配，从而得到每个盒中出红球的情况，进而计算出概率

(1) 设事件 A_i 为“甲盒中取出 i 个红球”，事件 B_j 为“乙盒中取出 j 个红球”

$$\text{则 } P(A_i) = \frac{C_1^i C_3^{2-i}}{C_4^2}, P(B_j) = \frac{C_3^j C_3^{2-j}}{C_6^2}$$

设事件 A 为“4 个球中没有红球”

$$\text{则 } P(A) = P(A_0) \cdot P(B_0) = \frac{C_1^0 C_3^2}{C_4^2} \cdot \frac{C_3^0 C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{10}$$