

微专题 53 求数列的通项公式

一、基础知识——求通项公式的方法

1、累加（累乘法）

（1）累加法：如果递推公式形式为： $a_{n+1} - a_n = f(n)$ ，则可利用累加法求通项公式

① 等号右边为关于 n 的表达式，且能够进行求和

② a_{n+1}, a_n 的系数相同，且为作差的形式

例：数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ，且 $a_{n+1} - a_n = 2^n + 1$ ，求 a_n

解： $a_{n+1} - a_n = 2^n + 1$

$$a_n - a_{n-1} = 2^{n-1} + 1$$

$\vdots$

$$a_2 - a_1 = 2^1 + 1$$

累加可得： $a_n - a_1 = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + (n-1)$

$$= \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} + n - 1 = 2^n + n - 3$$

$$\therefore a_n = 2^n + n - 2$$

（2）累乘法：如果递推公式形式为： $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$ ，则可利用累乘法求通项公式

例：已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ，且 $na_{n+1} = (n+1)a_n$ ，求 a_n

$$\text{解：} na_{n+1} = (n+1)a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_1} = n \quad \therefore a_n = na_1 = n$$

2、构造辅助数列：通过对递推公式进行变形，变形为**相邻项同构**的特点，进而将相同的结构视为一个整体，即构造出辅助数列。通过求出辅助数列的通项公式，便可算出原数列的通项

公式

(1) 形如 $a_n = pa_{n-1} + q$ ($p \neq 1, q \neq 0$) 的形式：通常可构造出等比数列，进而求出通项公式。

例：数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_n = 3a_{n-1} + 2$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

思路：观察到 a_n 与 a_{n-1} 有近似 3 倍的关系，所以考虑向等比数列方向构造，通过对 a_n 与 a_{n-1}

分别加上同一个常数 λ ，使之具备等比关系，考虑利用待定系数法求出 λ

解：设 $a_n + \lambda = 3(a_{n-1} + \lambda)$ 即 $a_n = 3a_{n-1} + 2\lambda$

对比 $a_n = 3a_{n-1} + 2$ ，可得 $\lambda = 1$

$$\therefore a_n + 1 = 3(a_{n-1} + 1)$$

$\therefore \{a_n + 1\}$ 是公比为 3 的等比数列

$$\therefore a_n + 1 = (a_1 + 1) \cdot 3^{n-1} \quad \therefore a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

(2) 形如 $a_n = pa_{n-1} + q^n$ ，此类问题可先处理 q^n ，两边同时除以 q^n ，得 $\frac{a_n}{q^n} = p \frac{a_{n-1}}{q^{n-1}} + 1$ ，

进而构造 $\frac{a_n}{q^n} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_{n-1}}{q^{n-1}} + 1$ ，设 $b_n = \frac{a_n}{q^n}$ ，从而变成 $b_n = \frac{p}{q} \cdot b_{n-1} + 1$ ，从而将问题转化为第

(1) 个问题

例：在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_n = 3a_{n-1} + 2 \cdot 3^n$

解： $a_n = 3a_{n-1} + 2 \cdot 3^n$

$$\therefore \frac{a_n}{3^n} = \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + 2$$

$\therefore \left\{ \frac{a_n}{3^n} \right\}$ 是公差为 2 的等差数列

$$\therefore \frac{a_n}{3^n} = \frac{a_1}{3^1} + (n-1) \cdot 2 = 2n - \frac{5}{3}$$

$$\therefore a_n = \left(2n - \frac{5}{3} \right) \cdot 3^n$$

小结：对于以上两个问题，还有一个通用的方法：对于形如 $a_n = pa_{n-1} + f(n)$ （其中 $f(n)$ 为