微专题74 利用几何关系求解最值问题

一、基础知识：

1、利用几何关系求最值的一般思路:

（1）抓住图形中的定点与定长，通常与求最值相关

（2）遇到线段和差的最值，经常在动点与定点共线的时候取到。因为当动点与定点不共线时，便可围成三角形，从而由三角形性质可知两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，无法取得最值。所以只有共线时才有可能达到最值。要注意动点与定点相对位置关系。一般的，寻找线段和的最小值，则动点应在定点连成的线段上；若寻找线段差的最小值，则动点应在定点连成的线段延长线上。

（3）若所求线段无法找到最值关系，则可考虑利用几何关系进行线段转移，将其中某些线段用其它线段进行表示，进而找到最值位置

（4）处理多个动点问题时，可考虑先只让一个动点运动，其他动点不动，观察此动点运动时最值选取的规律，再根据规律让其他点动起来，寻找最值位置。

2、常见的线段转移：

（1）利用对称轴转移线段（详见例 1）

（2）在圆中，可利用与半径相关的直角三角形（例如半弦，圆心到弦的垂线，半径；或是切线，半径，点与圆心的连线）通过勾股定理进行线段转移。

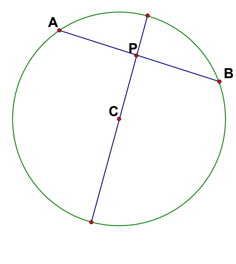
（3）在抛物线中，可利用“点到准线的距离等于该点到焦点的距离”的特点进行两个距离的相互转化。

（4）在椭圆中，利用两条焦半径的和为常数，可将一条焦半径转移至另一条焦半径

（5）在双曲线中，利用两条焦半径的差为常数，也可将一条焦半径转移至另一条焦半径（注意点在双曲线的哪一支上）

3、与圆相关的最值问题：

（1）已知圆 C 及圆外一定点 P，设圆 C 的半径为 r 则圆上点到 P 点距离的最小值为 $|PM|=|PC|-r$，最大值为 $|PN|=|PC|+r$（即连结 PC 并延长，M 为 PC 与圆的交点，N 为 PC 延长线与圆的交点

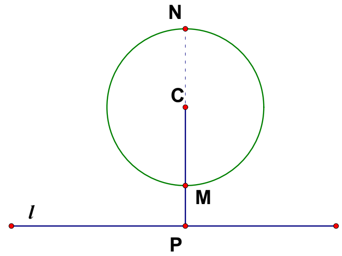


（2）已知圆 C 及圆内一定点 P，则过 P 点的所有弦中最长的为直径，最短的为与该直径垂直的弦 MN

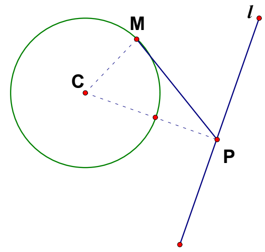
解:，弦长的最大值为直径，而最小值考虑弦长公式为 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$，若 $|AB|$ 最小，则 d

要取最大，在圆中$\left|CP\right|$为定值，在弦绕P旋转的过程中，$d \le \left|CP\right|$，所以$d=\left|CP\right|$时，$\left|AB\right|$最小

（3）已知圆C和圆外的一条直线l，则圆上点到直线距离的最小值为$\left|PM\right|=d_{C-l}-r$，距离的最大值为$\left|PN\right|=d_{C-l}+r$（过圆心$C$作$l$的垂线，垂足为$P$，$CP$与圆$C$交于$M$，其反向延长线交圆$C$于$N$



（4）已知圆C和圆外的一条直线l，则过直线l上的点作圆的切线，切线长的最小值为$\left|PM\right|$



解：$\left|PM\right|=\sqrt{\left|CP\right|^2-r^2}$，则若$\left|PM\right|$最小，则只需$\left|CP\right|$最小即可，所以$P$点为过$C$作$l$垂线的垂足时，$\left|CP\right|$最小

$\therefore$过P作圆的切线，则切线长$\left|PM\right|$最短

4、与圆锥曲线相关的最值关系：

（1）椭圆：设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$

① 焦半径：焦半径的最大值为$a+c$，最小值为$a-c$

② 焦点弦：焦点弦长的最小值称为通径，为$\dfrac{2b^2}{a}$，此时焦点弦与焦点所在的坐标轴垂直

（2）双曲线：设双曲线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$

① 焦半径：焦半径的最小值为$a-c$，无最大值

② 焦点弦：焦点弦长的最小值称为通径，为$\dfrac{2b^2}{a}$，此时焦点弦与焦点所在的坐标轴垂直

（3）抛物线：设抛物线方程为$y^2=2px$

① 焦半径：由抛物线的焦半径公式可知：焦半径的最小值为原点到焦点的距离，即$\dfrac{p}{2}$

② 焦点弦：当焦点弦与焦点所在坐标轴垂直时，弦长最小，为$2p$

二、典型例题：