微专题 72 圆锥曲线中的面积问题

一、基础知识：

1、面积问题的解决策略：

（1）求三角形的面积需要寻底找高，需要两条线段的长度，为了简化运算，通常优先选择能用坐标直接进行表示的底（或高）。

（2）面积的拆分：不规则的多边形的面积通常考虑拆分为多个三角形的面积和，对于三角形如果底和高不便于计算，则也可以考虑拆分成若干个易于计算的三角形

2、多个图形面积的关系的转化：关键词“求同存异”，寻找这些图形的底和高中是否存在“同底”或“等高”的特点，从而可将面积的关系转化为线段的关系，使得计算得以简化

3、面积的最值问题：通常利用公式将面积转化为某个变量的函数，再求解函数的最值，在寻底找高的过程中，优先选择长度为定值的线段参与运算。这样可以使函数解析式较为简单，便于分析

4、椭圆与双曲线中焦点三角形面积公式（证明详见“圆锥曲线的性质”）

（1）椭圆：设 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 上一点，且 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$

（2）双曲线：设 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a,b>0\right)$ 上一点，且 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\cdot\frac{1}{\cot\frac{\theta}{2}}$

二、典型例题：

例 1：设 F_1,F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左右焦点，过椭圆中心任作一直线与椭圆交于 P,Q 两点，当四边形 PF_1QF_2 的面积最大时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的值等于__________

思路：由椭圆中心对称的特性可知 P,Q 关于原点中心对称，所以 $\triangle PF_1F_2$ 与 $\triangle QF_1F_2$ 关于原点对称，面积相等。且四边形 PF_1QF_2 可拆成 $\triangle PF_1F_2$ 与 $\triangle QF_1F_2$ 的和，所以四边形 PF_1QF_2 的面积最大即 $\triangle PF_1F_2$ 面积最大，因为 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\left|F_1F_2\right|\cdot y_p=c\cdot y_p$，所以当 y_p 最大时，$\triangle PF_1F_2$ 面积最大。即 P 位于短轴顶点时，$\triangle PF_1F_2$ 面积最大。由 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 可知 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$，所以 $P\left(0,1\right),F_1\left(-\sqrt{3},0\right),F_2\left(\sqrt{3},0\right)$，进而计算出 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的值为 -2

答案：-2

例 2：已知点 P 是椭圆 $16x^2+25y^2=1600$ 上的一点，且在 x 轴上方，F_1,F_2 分别为椭圆的左右焦点，直线 PF_2 的斜率为 $-4\sqrt{3}$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积是（　　）

A. $32\sqrt{3}$　　B. $24\sqrt{3}$　　C. $32\sqrt{2}$　　D. $24\sqrt{2}$

思路：将椭圆化为标准方程为 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$，进而可得 $c=6$，所以 $F_1\left(-6,0\right),F_2\left(6,0\right)$，计算 $\triangle PF_1F_2$ 的面积可以以 $\left|F_1F_2\right|$ 为底，$\left|P_y\right|$ 为高，所以考虑利用条件计算出 P 的纵坐标，设 $P\left(x,y\right)$，则有 $k_{PF_2}=\frac{y}{x-6}=-4\sqrt{3}$，所以 $\begin{cases}16x^2+25y^2=1600\\ \frac{y}{x-6}=-4\sqrt{3}\\ y>0\end{cases}$ 可解得 $y=4\sqrt{3}$ 或 $y=-\frac{64\sqrt{3}}{19}$（舍去），所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\left|F_1F_2\right|\cdot y=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$

答案：B

例 3：已知 F 为抛物线 $y^2=x$ 的焦点，点 A,B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. $\frac{17\sqrt{2}}{8}$　　D. $\sqrt{10}$

思路：由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ 入手可考虑将向量坐标化，设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1x_2+y_1y_2=2$，进而想到可用韦达定理。所以设 AB 与 x 轴交于 $M\left(m,0\right)$ 直线 $AB: x=ty+m$。联立方程 $\begin{cases}y^2=x\\ x=ty+m\end{cases}\Rightarrow y^2-ty-m=0$，所以 $y_1y_2=-m<0, x_1x_2=y_1^2y_2^2=m^2$，所以由 $x_1x_2+y_1y_2=2$ 可得：$m^2-m=2\Rightarrow m=2$，所以 $y_1y_2=-2$，不妨设 A 在 x 轴上方，如图可得：$S_{\triangle ABO}+S_{\triangle AFO}=\frac{1}{2}\left|OM\right|\cdot\left(y_1-y_2\right)+\frac{1}{2}\left|OF\right|\cdot y_1=\frac{9}{8}y_1-y_2$，由 $y_1y_2=-2$ 可知 $y_2=-\frac{2}{y_1}$，消元后可得：$S_{\triangle ABO}+S_{\triangle AFO}=\frac{9}{8}y_1+\frac{2}{y_1}\geq 2\sqrt{\frac{9}{8}y_1\cdot\frac{2}{y_1}}=3$，等号成立当且仅当 $y_1=\frac{4}{3}$，所以 $S_{\triangle ABO}+S_{\triangle AFO}$ 的最小值为 3