微专题 70 求点的轨迹问题

一、基础知识：

1、求点轨迹方程的步骤：

（1）建立直角坐标系

（2）设点：将所求点坐标设为(x,y)，同时将其他相关点坐标化（未知的暂用参数表示）

（3）列式：从已知条件中发掘x,y的关系，列出方程

（4）化简：将方程进行变形化简，并求出x,y的范围

2、求点轨迹方程的方法

（1）直接法：从条件中直接寻找到x,y的关系，列出方程后化简即可

（2）代入法：所求点$P(x,y)$与某已知曲线$F(x_0,y_0)=0$上一点$Q(x_0,y_0)$存在某种关系，则可根据条件用x,y表示出x_0,y_0，然后代入到Q所在曲线方程中，即可得到关于x,y的方程

（3）定义法：从条件中能够判断出点的轨迹为学过的图形，则可先判定轨迹形状，再通过确定相关曲线的要素，求出曲线方程。常见的曲线特征及要素有：

① 圆：平面上到定点的距离等于定长的点的轨迹

直角→圆：若$AB\perp AC$，则A点在以BC为直径的圆上

确定方程的要素：圆心坐标(a,b)，半径r

② 椭圆：平面上到两个定点的距离之和为常数（常数大于定点距离）的点的轨迹

确定方程的要素：距离和$2a$，定点距离$2c$

③ 双曲线：平面上到两个定点的距离之差的绝对值为常数（小于定点距离）的点的轨迹

注：若只是到两定点的距离差为常数（小于定点距离），则为双曲线的一支

确定方程的要素：距离差的绝对值$2a$，定点距离$2c$

④ 抛物线：平面上到一定点的距离与到一定直线的距离（定点在定直线外）相等的点的轨迹

确定方程的要素：焦准距：p。若曲线位置位于标准位置（即标准方程的曲线），则通过准线方程或焦点坐标也可确定方程

（4）参数法：从条件中无法直接找到x,y的联系，但可通过一辅助变量k，分别找到x,y与k的联系，从而得到x,y和k的方程：$\begin{cases}x=f(k)\\y=g(k)\end{cases}$，即曲线的参数方程，消去参数$k$后即可得到轨迹方程。

二、典型例题：

例 1：设一动点 P 到直线 $l:x=3$ 的距离到它到点 $A(1,0)$ 的距离之比为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，则动点 P 的轨迹方程是（　　）

A. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　　　B. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

C. $\frac{(x-4)^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$　　　　D. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$

思路：设 $P(x,y)$，则可直接利用已知条件列出关于 x,y 的等式，化简即可

解：设 $P(x,y)$　　$\therefore \frac{d_{P-l}}{|PA|}=\frac{|x-3|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore 3|x-3|=\sqrt{3\left[(x-1)^2+y^2\right]}$

$\Rightarrow 3(x-3)^2=(x-1)^2+y^2$

$\Rightarrow 2x^2-16x-y^2=-26$

$\Rightarrow 2(x-4)^2-y^2=6 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$

答案：C

例 2：已知两定点的坐标分别为 $A(-1,0),B(2,0)$，动点满足条件 $\angle MBA=2\angle MAB$，则动点 M 的轨迹方程为__________

思路：通过作图可得 $\angle MBA=2\angle MAB$ 等价的条件为直线 MA,MB 的斜率的关系，设 $\angle MAB=\alpha$，则 $\angle MBA=2\alpha$，则可通过 MA,MB 的斜率关系得到动点 M 的方程

解：若 M 在 x 轴上方，则 $k_{MA}=\tan\alpha,k_{MB}=-\tan 2\alpha$

$\therefore k_{MB}=-\frac{2k_{MA}}{1-k_{MA}^2}$　　$\because k_{MA}=\frac{y}{x+1},k_{MB}=\frac{y}{x-2}$ 代入可得：

$\frac{y}{x-2}=-\frac{2\cdot\frac{y}{x+1}}{1-\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}\left(2\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$，化简可得：