

微专题 69 直线与圆锥曲线位置关系

一、基础知识：

（一）直线与椭圆位置关系

1、直线与椭圆位置关系：相交（两个公共点），相切（一个公共点），相离（无公共点）

2、直线与椭圆位置关系的判定步骤：通过方程根的个数进行判定，

下面以直线 $y = kx + m$ 和椭圆： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 为例

（1）联立直线与椭圆方程：
$$\begin{cases} y = kx + m \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

（2）确定主变量 x （或 y ）并通过直线方程消去另一变量 y （或 x ），代入椭圆方程得到关于主变量的一元二次方程： $b^2x^2 + a^2(kx + m)^2 = a^2b^2$ ，整理可得：

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2kxm + a^2m^2 - a^2b^2 = 0$$

（3）通过计算判别式 Δ 的符号判断方程根的个数，从而判定直线与椭圆的位置关系

① $\Delta > 0 \Rightarrow$ 方程有两个不同实根 $\Rightarrow$ 直线与椭圆相交

② $\Delta = 0 \Rightarrow$ 方程有两个相同实根 $\Rightarrow$ 直线与椭圆相切

③ $\Delta < 0 \Rightarrow$ 方程没有实根 $\Rightarrow$ 直线与椭圆相离

3、若直线上的某点位于椭圆内部，则该直线一定与椭圆相交

（二）直线与双曲线位置关系

1、直线与双曲线位置关系，相交，相切，相离

2、直线与双曲线位置关系的判定：与椭圆相同，可通过方程根的个数进行判定

以直线 $y = kx + m$ 和椭圆： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 为例：

（1）联立直线与双曲线方程：
$$\begin{cases} y = kx + m \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$
，消元代入后可得：

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kxm - (a^2m^2 + a^2b^2) = 0$$

（2）与椭圆不同，在椭圆中，因为 $a^2k^2 + b^2 > 0$ ，所以消元后的方程一定是二次方程，但双曲线中，消元后的方程二次项系数为 $b^2 - a^2k^2$ ，有可能为零。所以要分情况进行讨论

当 $b^2 - a^2k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm \frac{b}{a}$ 且 $m \neq 0$ 时，方程变为一次方程，有一个根。此时直线与双曲线相交，只有一个公共点

当 $b^2 - a^2k^2 > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$ 时，常数项为 $-(a^2m^2 + a^2b^2) < 0$ ，所以 $\Delta > 0$ 恒成立，此时直线与双曲线相交

当 $b^2 - a^2k^2 < 0 \Rightarrow k > \frac{b}{a}$ 或 $k < -\frac{b}{a}$ 时，直线与双曲线的公共点个数需要用 Δ 判断：

① $\Delta > 0 \Rightarrow$ 方程有两个不同实根 $\Rightarrow$ 直线与双曲线相交

② $\Delta = 0 \Rightarrow$ 方程有两个相同实根 $\Rightarrow$ 直线与双曲线相切

③ $\Delta < 0 \Rightarrow$ 方程没有实根 $\Rightarrow$ 直线与双曲线相离

注：对于直线与双曲线的位置关系，不能简单的凭公共点的个数来判定位置。尤其是直线与双曲线有一个公共点时，如果是通过一次方程解出，则为相交；如果是通过二次方程解出相同的根，则为相切

（3）直线与双曲线交点的位置判定：因为双曲线上的点横坐标的范围为 $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ ，所以通过横坐标的符号即可判断交点位于哪一支上：当 $x \geq a$ 时，点位于双曲线的右支；当 $x \leq -a$ 时，点位于双曲线的左支。对于方程：

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kxm - (a^2m^2 + a^2b^2) = 0, \text{ 设两个根为 } x_1, x_2$$

① 当 $b^2 - a^2k^2 > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$ 时，则 $x_1x_2 = -\frac{a^2m^2 + a^2b^2}{b^2 - a^2k^2} < 0$ ，所以 x_1, x_2 异号，即交点分别位于双曲线的左，右支

② 当 $b^2 - a^2k^2 < 0 \Rightarrow k > \frac{b}{a}$ 或 $k < -\frac{b}{a}$ ，且 $\Delta > 0$ 时， $x_1x_2 = -\frac{a^2m^2 + a^2b^2}{b^2 - a^2k^2} > 0$ ，所以 x_1, x_2 同号，即交点位于同一支上

（4）直线与双曲线位置关系的几何解释：通过（2）可发现直线与双曲线的位置关系与直线的斜率相关，其分界点 $\pm \frac{b}{a}$ 刚好与双曲线的渐近线斜率相同。所以可通过数形结合得到位置关系的判定

① $k = \pm \frac{b}{a}$ 且 $m \neq 0$ 时，此时直线与渐近线平行，可视为渐近线进行平移，则在平移过程中与双曲线的一支相交的同时，也在远离双曲线的另一支，所以只有一个交点

② $-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$ 时，直线的斜率介于两条渐近线斜率之中，通过图像可得无论如何平移直线，