

微专题 66 直线与圆位置关系

一、基础知识：

1、定义：在平面上到定点的距离等于定长的点的轨迹是圆

2、圆的标准方程：设圆心的坐标 $C(a, b)$ ，半径为 r ，则圆的标准方程为：

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

3、圆的一般方程：圆方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

(1) x^2, y^2 的系数相同

(2) 方程中无 xy 项

(3) 对于 D, E, F 的取值要求： $D^2 + E^2 - 4F > 0$

4、直线与圆位置关系的判定：相切，相交，相离，位置关系的判定有两种方式：

(1) 几何性质：通过判断圆心到直线距离与半径的大小得到直线与圆位置关系，设圆的半径为 r ，圆心到直线的距离为 d ，则：

① 当 $r > d$ 时，直线与圆相交

② 当 $r = d$ 时，直线与圆相切

③ 当 $r < d$ 时，直线与圆相离

(2) 代数性质：可通过判断直线与圆的交点个数得到直线与圆位置关系，即联立直线与圆的方程，再判断解的个数。设直线： $Ax + By + C = 0$ ，圆： $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，则：

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 可得关于 } x \text{ 的一元二次方程，考虑其判别式的符号}$$

① $\Delta > 0$ ，方程组有两组解，所以直线与圆相交

② $\Delta = 0$ ，方程组有一组解，所以直线与圆相切

③ $\Delta < 0$ ，方程组无解，所以直线与圆相离

5、直线与圆相交：

$$\text{弦长计算公式： } |AB| = 2|AM| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

6、直线与圆相切：

(1) 如何求得切线方程：主要依据两条性质：一是切点与圆心的连线与切线垂直；二是圆心到切线的距离等于半径

例：已知圆的方程为： $x^2 + y^2 = 4$ 及圆上一点 $P(1, \sqrt{3})$ ，求过 P 的圆的切线

方法一：利用第一条性质： $k_{OP} = \sqrt{3}$ ，所以可得切线斜率 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ 切线方程为： $y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$ ，整理后可得： $x + \sqrt{3}y = 4$

方法二：利用第二条性质：设切线方程 l 为： $y - \sqrt{3} = k(x - 1)$

即 $kx - y + \sqrt{3} - k$ $\therefore d_{O-l} = \frac{|\sqrt{3} - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = r = 2$

整理可得： $3k^2 + 2\sqrt{3}k + 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{3}k + 1)^2 = 0$ 解得： $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore l: y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \Rightarrow \sqrt{3}x + y = 4$

(2) 圆上点的切线结论：

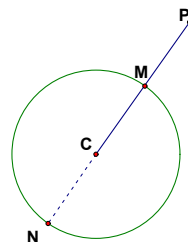
① 圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$

② 圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 上点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = r^2$

(3) 过圆外一点的切线方程（两条切线）：可采取上例方法二的做法，先设出直线方程，再利用圆心到切线距离等于半径求得斜率，从而得到方程。（要注意判断斜率不存在的直线是否为切线）

7、与圆相关的最值问题

(1) 已知圆 C 及圆外一定点 P ，设圆 C 的半径为 r 则圆上点到 P 点距离的最小值为 $|PM| = |PC| - r$ ，最大值为 $|PN| = |PC| + r$ （即连结 PC 并延长， M 为 PC 与圆的交点， N 为 PC 延长线与圆的交点



(2) 已知圆 C 及圆内一定点 P ，则过 P 点的所有弦中最长的为直径，

