

微专题 54 数列求和问题

数列求和问题是高考数列中的一个易考类型，在已知通项公式的前提下，要通过观察通项公式（或者项）的特点决定选择哪种方法进行求和。考查学生的观察能力与辨析能力。所以在复习的过程中要抓住每种求和方法相对应的通项公式特点，并在练习中熟悉解法

一、基础知识：

1、根据通项公式的特点求和：

$$(1) \text{ 等差数列求和公式: } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_p + a_q}{2} \cdot n \quad (p + q = n + 1)$$

$$S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d$$

$$(2) \text{ 等比数列求和公式: } S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \\ a_1 n, & q = 1 \end{cases}$$

(3) 错位相减法：

通项公式特点： $a_n = \text{等差} \times \text{等比}$ ，比如 $a_n = n \cdot 2^n$ ，其中 n 代表一个等差数列的通项公式（关于 n 的一次函数）， 2^n 代表一个等比数列的通项公式（关于 n 的指数型函数），那么便可以使用错位相减法

方法详解：以 $a_n = (2n-1) \cdot 2^n$ 为例，设其前 n 项和为 S_n

$$\textcircled{1} \text{ 先将 } S_n \text{ 写成 } n \text{ 项和的形式 } S_n = 1 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^n$$

$\textcircled{2}$ 两边同时乘以等比部分的公比，得到一个新的等式，与原等式上下排列

$$S_n = 1 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^n$$

$2S_n = 1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^n + (2n-1) \cdot 2^{n+1}$ ，发现乘完公比后，对比原式项的次数，新等式的每项向后挪了一位。

$\textcircled{3}$ 然后两式相减： $-S_n = 1 \cdot 2^1 + 2(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (2n-1) \cdot 2^{n+1}$ 除了首项与末项，中间部分呈等比数列求和的特点，代入公式求和，再解出 S_n 即可

$$-S_n = 1 \cdot 2^1 + 2(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (2n-1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 2 + 2 \cdot \frac{4(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (2n - 1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= (3 - 2n) \cdot 2^{n+1} - 6$$

所以 $S_n = (2n - 3) \cdot 2^{n+1} + 6$

对“错位相减法”的深层理解：通项公式的特点在错位相减法的过程中体现了怎样的作用？

通过解题过程我们可以发现：等比的部分使得每项的次数逐次递增，才保证在两边同乘公比时实现了“错位”的效果。而等差的部分错位部分“相减”后保持系数一致（其系数即为等差部分的公差），从而可圈在一起进行等比数列求和。体会到“错位”与“相减”所需要的条件，则可以让我们更灵活的使用这一方法进行数列求和

(4) 裂项相消：

通项公式特点： a_n 的表达式能够拆成形如 $a_n = f(n) - f(n-k)$ 的形式 ($k=1, 2, \dots$)，从而在求和时可以进行相邻项（或相隔几项）的相消。从而结果只存在有限几项，达到求和目的。其中通项公式为分式和根式的居多

方法详解：以 $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ 为例

① 裂项：考虑 $a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$ (这里 $f(n) = \frac{1}{n}$)，在裂项的过程中把握两

点：一是所裂两项要具备“依序同构”的特点，比如这里的 $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}$ 结构相同，且分母为相邻的两个数；二是可以先裂再调：先大胆的将分式裂成两项的差，再将结果通分求和与原式

进行比较并调整（调整系数），比如本题中 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{n(n+2)}$ ，在调整系数使之符合通

项公式即可

② 求和：设 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right), \text{ 求和的关键在于确定剩下的项。通过}$$

观察可发现正项中 $1, \frac{1}{2}$ 没有消去，负项中 $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}$ 没有消去。

$$\text{所以 } \therefore S_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$