

微专题 100 利用同构特点解决问题

一、基础知识:

1、同构式:是指除了变量不同,其余地方均相同的表达式

2、同构式的应用:

(1) 在方程中的应用:如果方程 $f(a)=0$ 和 $f(b)=0$ 呈现同构特征,则 a,b 可视为方程 $f(x)=0$ 的两个根

(2) 在不等式中的应用:如果不等式的两侧呈现同构特征,则可将相同的结构构造为一个函数,进而和函数的单调性找到联系.可比较大小或解不等式

(3) 在解析几何中的应用:如果 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 满足的方程为同构式,则 A, B 为方程所表示曲线上的两点.特别的,若满足的方程是直线方程,则该方程即为直线 AB 的方程

(4) 在数列中的应用:可将递推公式变形为“依序同构”的特征,即关于 (a_n, n) 与 $(a_{n-1}, n-1)$ 的同构式,从而将同构式设为辅助数列便于求解

二、典型例题:

例 1: (2015 天津十二校联考) 设 $x, y \in R$, 满足
$$\begin{cases} (x-1)^5 + 2x + \sin(x-1) = 3 \\ (y-1)^5 + 2y + \sin(y-1) = 1 \end{cases}$$
, 则 $x+y=$ ()

A. 0

B. 2

C. 4

D. 6

思路: 本题研究对象并非 x, y , 而是 $(x-1), (y-1)$, 进而可变形为

$$\begin{cases} (x-1)^5 + 2(x-1) + \sin(x-1) = 1 \\ (y-1)^5 + 2(y-1) + \sin(y-1) = -1 \end{cases}$$
, 观察上下式子左边结构相同, 进而可将相同的结构

视为一个函数, 而等式右边两个结果互为相反数, 可联想到函数的奇偶性, 从而利用函数性质求解

解:
$$\begin{cases} (x-1)^5 + 2x + \sin(x-1) = 3 \\ (y-1)^5 + 2y + \sin(y-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^5 + 2(x-1) + \sin(x-1) = 1 \\ (y-1)^5 + 2(y-1) + \sin(y-1) = -1 \end{cases}$$

设 $f(t) = t^5 + 2t + \sin t$, 可得 $f(t)$ 为奇函数, 由题意可得:

$$\begin{cases} f(x-1) = 1 \\ f(y-1) = -1 \end{cases} \therefore f(x-1) = -f(y-1)$$

$$\therefore x-1=-(y-1) \Rightarrow x+y=2$$

答案：B

例 2：若函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+m$ 在区间 $[a,b]$ 上的值域为 $\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right]$ ($b>a\geq 1$)，则实数 m 的取值范围是_____

思路：注意到 $f(x)$ 是增函数，从而得到 $f(a)=\frac{a}{2}, f(b)=\frac{b}{2}$ ，即
$$\begin{cases} \sqrt{a-1}+m=\frac{a}{2} \\ \sqrt{b-1}+m=\frac{b}{2} \end{cases}$$
，发现两

个式子为 a, b 的同构式，进而将同构式视为一个方程，而 a, b 为该方程的两个根， m 的取值只需要保证方程有两根即可

解： $\because f(x)$ 为增函数

$$\therefore f(a)=\frac{a}{2}, f(b)=\frac{b}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a-1}+m=\frac{a}{2} \\ \sqrt{b-1}+m=\frac{b}{2} \end{cases}$$

$\therefore a, b$ 为方程 $\sqrt{x-1}+m=\frac{x}{2}$ 在 $[1, +\infty)$ 上的两个根，即 $m=\frac{x}{2}-\sqrt{x-1}$ 有两个不同的根

$$\text{令 } t=\sqrt{x-1} (t\geq 0) \Rightarrow x=t^2+1$$

所以方程变形为： $m=\frac{1}{2}(t^2+1)-t=\frac{1}{2}(t^2-2t+1)$ ，结合图像可得： $m\in\left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$\text{答案： } m\in\left(0, \frac{1}{2}\right]$$

例 3：设 $a, b \in \mathbb{R}$ ，则“ $a>b$ ”是“ $a|a|>b|b|$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充要又不必要条件

思路：观察 $a|a|>b|b|$ 可发现其同构的特点，所以将这种结构设为函数 $f(x)=x|x|$ ，分析其

单调性。 $f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2, x>0 \\ -x^2, x<0 \end{cases}$ 可得 $f(x)$ 为增函数。所以 $a>b \hat{=} f(a)>f(b)$ ，即