

微专题 82 求二项式展开后的某项

一、基础知识：

1、二项式 $(a+b)^n (n \in N^*)$ 展开式

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n$ ，从恒等式中我们可以发现这样几个特点

(1) $(a+b)^n$ 完全展开后的项数为 $(n+1)$

(2) 展开式按照 a 的指数进行降幂排列，对于展开式中的每一项， a, b 的指数呈此消彼长的特点。指数和为 n

(3) 在二项式展开式中由于按 a 的指数进行降幂排列，所以规定“+”左边的项视为 a ，右边的项为 b ，比如： $(x+1)^n$ 与 $(1+x)^n$ 虽然恒等，但是展开式却不同，前者按 x 的指数降幂排列，后者按 1 的指数降幂排列。如果是 $(a-b)^n$ ，则视为 $[a+(-b)]^n$ 进行展开

(4) 二项展开式的通项公式 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$ （注意是第 $r+1$ 项）

2、二项式系数：项前面的 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$ 称为二项式系数，二项式系数的和为 2^n

二项式系数的来源：多项式乘法的理论基础是乘法的运算律（分配律，交换律，结合律），所以在展开时有这样一个特征：每个因式都必须出项，并且只能出一项，将每个因式所出的项乘在一起便成为了展开式中的某项。对于 $(a+b)^n$ 可看作是 n 个 $(a+b)$ 相乘，对于 $a^{n-r} b^r$ 意味着在这 n 个 $(a+b)$ 中，有 $(n-r)$ 个式子出 a ，剩下 r 个式子出 b ，那么这种出法一共有 C_n^r 种。所以二项式展开式的每一项都可看做是一个组合问题。而二项式系数便是这个组合问题的结果。

3、系数：是指该项经过化简后项前面的数字因数

注：(1) 在二项式定理中要注意区分二项式系数与系数。二项式系数是展开式通项公式中的 C_n^r ，对于确定的一个二项式，二项式系数只由 r 决定。而系数是指展开并化简后最后项前面的因数，其构成一方面是二项式系数，同时还有项本身的系数。例如： $(2x+1)^5$ 展开式中第三项为 $T_3 = C_5^2 \cdot (2x)^3 \cdot 1^2$ ，其中 C_5^2 为该项的二项式系数，而 $T_3 = C_5^2 \cdot (2x)^3 \cdot 1^2 = 80x^3$ 化简后的结果 80 为该项的系数

(2) 二项式系数与系数的概念不同，但在某些情况下可以相等：当二项式中每项的系数均为 1 时（排除项本身系数的干扰），则展开后二项式系数与系数相同。例如 $(x+1)^5$ 展开式的第三项为 $T_3 = C_5^2 \cdot (x)^3 \cdot 1^2$ ，可以计算出二项式系数与系数均为 10

3、有理项：系数为有理数，次数为整数的项，比如 $2x^2, \frac{1}{5x}$ 就是有理项，而 $\sqrt[3]{x}, \sqrt{5x}$ 就不是有理项。

4、 $(a+b)^n$ 与 $(a-b)^n$ 的联系：首先观察他们的通项公式：

$$(a+b)^n: T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r \quad (a-b)^n: T_{r+1}' = C_n^r a^{n-r} (-b)^r = (-1)^r C_n^r a^{n-r} b^r$$

两者对应项的构成是相同的，对应项的系数相等或互为相反数。其绝对值相等。所以在考虑

$(a-b)^n$ 系数的绝对值问题时，可将其转化为求 $(a+b)^n$ 系数的问题

5、二项式系数的最大值：在 $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ 中，数值最大的位于这列数的中间位置。若 n 为奇数（共有偶数项），则最大值为中间两个，例如 $n=5$ 时，最大项为 $C_5^2 = C_5^3$ ，若 n 为偶数（共有奇数项），则最大值为中间项，例如 $n=6$ 时，最大项为 C_6^3

证明：在 $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ 中的最大项首先要比相邻的两项大，所以不妨设最大项为 C_n^r ，则有

$$\begin{cases} C_n^r \geq C_n^{r-1} \\ C_n^r \geq C_n^{r+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n!}{r!(n-r)!} \geq \frac{n!}{(r-1)![n-(r-1)]!} \\ \frac{n!}{r!(n-r)!} \geq \frac{n!}{(r+1)![n-(r+1)]!} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r} \geq \frac{1}{n+1-r} \\ \frac{1}{n-r} \geq \frac{1}{r+1} \end{cases}$$

$$\text{所以解得: } \begin{cases} r \leq \frac{n+1}{2} \\ r \geq \frac{n-1}{2} \end{cases} \quad \text{即} \quad \frac{n-1}{2} \leq r \leq \frac{n+1}{2}$$

所以当 n 为奇数时（ $n=2k-1$ ），不等式变为 $k-1 \leq r \leq k$ ，即 $r=k-1$ 或 $r=k$ 为中间项

当 n 为偶数时（ $n=2k$ ），不等式变为 $k-\frac{1}{2} \leq r \leq k+\frac{1}{2}$ ，即 $r=k$ 为中间项

6、系数的最大值：由于系数受二项式系数与项自身系数影响，所以没有固定的结论，需要计算所得，大致分为两种情况：

$(_+ _)^n$ 型：不妨设项 T_{r+1} 的系数为 P_{r+1} ，则理念与二项式系数最值类似，最大值首先要比