

微专题 51 等差等比数列综合问题

一、基础知识：

1、等差数列性质与等比数列性质：

	等差数列 $\{a_n\}$	等比数列 $\{b_n\}$
递推公式	$a_{n+1} - a_n = d (n \in N^*)$	$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q (n \in N^*)$
通项公式	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$b_n = b_1 \cdot q^n$
等差（比）中项	$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$	$b_{n+1}^2 = b_n b_{n+2}$
$m+n=p+q$	$a_m + a_n = a_p + a_q$	$b_m b_n = b_p b_q$
等间隔抽项	仍构成等差数列	仍构成等比数列
相邻 k 项和	$S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等差数列	$S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等比数列

2、等差数列与等比数列的互化：

(1) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列， $c > 0, c \neq 1$ ，则 $\{c^{a_n}\}$ 成等比数列

证明：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则 $\frac{c^{a_{n+1}}}{c^{a_n}} = c^{a_{n+1} - a_n} = c^d$ 为一个常数

所以 $\{c^{a_n}\}$ 成等比数列

(2) 若 $\{a_n\}$ 为正项等比数列， $c > 0, c \neq 1$ ，则 $\{\log_c a_n\}$ 成等差数列

证明：设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则 $\log_c a_{n+1} - \log_c a_n = \log_c \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log_c q$ 为常数

所以 $\{\log_c a_n\}$ 成等差数列

二、典型例题：

例 1：已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $4a_1, a_3, 2a_2$ 成等差数列，则公比 $q =$ ()

A. 1 B. -1 或 2 C. 2 D. -1

思路：由“ $4a_1, a_3, 2a_2$ 成等差数列”可得： $2a_3 = 4a_1 + 2a_2 \Rightarrow a_3 = 2a_1 + a_2$ ，再由等比数列

定义可得： $a_3 = a_1 q^2, a_2 = a_1 q$ ，所以等式变为： $q^2 = 2 + q$ 解得 $q = 2$ 或 $q = -1$ ，经检验均

符合条件

答案：B

例 2：已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差 d 不为零，其前 n 项和是 S_n ，若 a_3, a_4, a_8 成等比数列，则（ ）

A. $a_1 d > 0, dS_4 > 0$

B. $a_1 d < 0, dS_4 < 0$

C. $a_1 d > 0, dS_4 < 0$

D. $a_1 d < 0, dS_4 > 0$

思路：从“ a_3, a_4, a_8 成等比数列”入手可得： $a_4^2 = a_3 a_8 \Rightarrow (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 7d)$ ，

整理后可得： $3a_1 d = -5d^2$ ，所以 $d = -\frac{3}{5}a_1$ ，则 $a_1 d = -\frac{3}{5}a_1^2 < 0$ ，且

$$dS_4 = d(4a_1 + 6d) = -\frac{6a_1^2}{25} < 0$$
，所以 B 符合要求

答案：B

小炼有话说：在等差数列（或等比数列）中，如果只有关于项的一个条件，则可以考虑将涉及的项均用 a_1, d （或 a_1, q ）进行表示，从而得到 a_1, d （或 a_1, q ）的关系

例 3：已知等比数列 $\{a_n\}$ 中的各项均为正数，且 $a_{10}a_{11} + a_9a_{12} = 2e^5$ ，则

$$\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_{20} = \underline{\hspace{2cm}}$$

思路：由等比数列性质可得： $a_{10}a_{11} = a_9a_{12}$ ，从而 $a_{10}a_{11} = a_9a_{12} = e^5$ ，因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，

所以 $\{\ln a_n\}$ 为等差数列，求和可用等差数列求和公式：

$$\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_{20} = \frac{\ln a_{10} + \ln a_{11}}{2} \cdot 20 = 10 \ln a_{10}a_{11} = 50$$

答案：50

例 4：三个数成等比数列，其乘积为 512，如果第一个数与第三个数各减 2，则成等差数列，则这三个数为_____

思路：可设这三个数为 $\frac{a}{q}, a, aq$ ，则有 $\frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = 512 \Rightarrow a^3 = 512$ ，解得 $a = 8$ ，而第一个数

与第三个数各减 2，新的等差数列为 $\frac{8}{q} - 2, 8, 8q - 2$ ，所以有： $16 = \left(\frac{8}{q} - 2\right) + (8q - 2)$ ，即