

微专题 79 利用点的坐标处理解析几何问题

有些解析几何的题目，问题的求解不依赖于传统的“设点，联立，消元，韦达定理整体代入”步骤，而是能够计算出交点的坐标，且点的坐标并不复杂，然后以点的坐标作为核心去处理问题。

一、基础知识：

1、韦达定理的实质：在处理解析几何的问题时，韦达定理的运用最频繁的，甚至有的学生将其视为“必备结构”，无论此题是否有思路，都先联立方程，韦达定理。然而使用“韦达定理”的实质是什么？实质是“整体代入”的一种方式，只是因为解析几何中，一些问题的求解经常与 $x_1 + x_2, x_1x_2, y_1 + y_2, y_1y_2$ 相关，利用“韦达定理”可进行整体代入，可避免因为这几个根的形式过于复杂导致运算繁琐。所以要理解“韦达定理”并不是解析几何的必备工具，只是在需要进行整体代入时，才运用的一种手段。

2、利用点坐标解决问题的优劣：

（1）优点：如果能得到点的坐标，那么便可应对更多的问题，且计算更为灵活，不受 $x_1 + x_2, x_1x_2, y_1 + y_2, y_1y_2$ 形式的约束

（2）缺点：有些方程的根过于复杂（例如用求根公式解出的根），从而使得点的坐标也变得复杂导致运算繁琐。那么此类问题则要考虑看能否有机会进行整体的代入

3、求点坐标的几种类型：

（1）在联立方程消元后，如果发现交点的坐标并不复杂（不是求根公式的形式），则可考虑把点的坐标解出来（用核心变量进行表示）

（2）直线与曲线相交，若其中一个交点的坐标已知，则另一交点必然可求（可用韦达定理或因式分解求解）

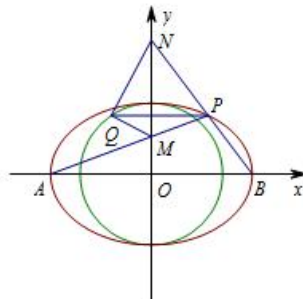
4、在利用点的坐标处理问题时也要注意运算的技巧，要将运算的式子与条件紧密联系，若能整体代入，也要考虑整体代入以简化运算。（整体代入是解析几何运算简化的精髓）

二、典型例题：

例 1：已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的点到它的两个焦点的距离之和为 4，以椭圆 C

的短轴为直径的圆 O 经过这两个焦点，点 A, B 分别是椭圆 C 的左右顶点

（1）求圆 O 和椭圆 C 的方程



(2) 已知 P, Q 分别是椭圆和圆上的动点 (P, Q 位于 y 轴的两侧), 且直线 PQ 与 x 轴平行,

直线 AP, BP 分别与 y 轴交于点 M, N , 求证: $\angle MQN$ 为定值

解: (1) 依题意可得 $2a = 4 \Rightarrow a = 2$, $\because \odot O$ 过焦点, 且 $r = b$

$\therefore b = c$, 再由 $b^2 + c^2 = a^2 = 4$ 可得 $b = c = \sqrt{2}$

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 圆方程为 $x^2 + y^2 = 2$

(2) 思路: 条件主要围绕着 P 点展开, 所以以 P 为核心, 设 $P(x_0, y_0)$, 由 PQ 与 x 轴平行,

可得 $Q(x_1, y_0)$ 。若要证明 $\angle MQN$ 为定值, 可从 $\angle MQN$ 的三角函数值下手, 在解析中角的

余弦值可以与向量的数量积找到联系, 从而能够转化为坐标运算。所以考虑

$\cos MQN = \frac{\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}}{|\overrightarrow{QM}| \cdot |\overrightarrow{QN}|}$, 模长并不利于计算, 所以先算 $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}$, 考虑利用条件设出

AP, BP 方程, 进而 M, N 坐标可用核心变量 x_0, y_0 表示, 再进行数量积的坐标运算可得

$\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN} = 0$, 从而 $\angle MQN = \frac{\pi}{2}$, 即为定值

解: 设 $P(x_0, y_0)$ $\because PQ$ 与 x 轴平行,

$\therefore$ 设 $Q(x_1, y_0)$, 由 P, Q 所在椭圆和圆方程可得:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1 \\ x_1^2 + y_0^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 = 4 - 2y_0^2 \\ x_1^2 = 2 - y_0^2 \end{cases}$$

由椭圆可知: $A(-2, 0), B(2, 0)$ $\therefore k_{AP} = \frac{y_0}{x_0 + 2}$ $\therefore AP: y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2)$

令 $x = 0$, 可得: $M\left(0, \frac{2y_0}{x_0 + 2}\right)$

同理: $BP: y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2)$ 可得 $N\left(0, \frac{-2y_0}{x_0 - 2}\right)$

$\therefore \overrightarrow{QM} = \left(-x_1, \frac{2y_0}{x_0 + 2} - y_0\right) = \left(-x_1, -\frac{x_0 y_0}{x_0 + 2}\right), \overrightarrow{QN} = \left(-x_1, -\frac{2y_0}{x_0 - 2} - y_0\right) = \left(-x_1, -\frac{x_0 y_0}{x_0 - 2}\right)$