

微专题 75 几何问题的转换

一、基础知识：

在圆锥曲线问题中，经常会遇到几何条件与代数条件的相互转化，合理的进行几何条件的转化往往可以起到“四两拨千斤”的作用，极大的简化运算的复杂程度，在本节中，将列举常见的一些几何条件的转化。

1、在几何问题的转化中，向量是一个重要的桥梁：一方面，几何图形中的线段变为有向线段后可以承载向量；另一方面，向量在坐标系中能够坐标化，从而将几何图形的要素转化为坐标的运算，与方程和变量找到联系

2、常见几何问题的转化：

（1）角度问题：

- ① 若与直线倾斜角有关，则可以考虑转化为斜率 k
- ② 若需要判断角是锐角还是钝角，则可将此角作为向量的夹角，从而利用向量数量积的符号进行判定

（2）点与圆的位置关系

- ① 可以利用圆的定义，转化为点到圆心距离与半径的联系，但需要解出圆的方程，在有些题目中计算量较大
- ② 若给出圆的一条直径，则可根据该点与直径端点连线的夹角进行判定：若点在圆内， $\angle ACB$ 为钝角（再转为向量： $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} < 0$ ；若点在圆上，则 $\angle ACB$ 为直角（ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ ）；若点在圆外，则 $\angle ACB$ 为锐角（ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} > 0$ ）

（3）三点共线问题

- ① 通过斜率：任取两点求出斜率，若斜率相等，则三点共线
- ② 通过向量：任取两点确定向量，若向量共线，则三点共线

（4）直线的平行垂直关系：可转化为对应向量的平行与垂直问题，从而转为坐标运算：

$$\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2), \text{ 则 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 共线 } \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1; \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

（5）平行（共线）线段的比例问题：可转化为向量的数乘关系

（6）平行（共线）线段的乘积问题：可将线段变为向量，从而转化为向量数量积问题（注意向量的方向是同向还是反向）

3、常见几何图形问题的转化

(1) 三角形的“重心”：设不共线的三点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ，则 $\triangle ABC$ 的重心

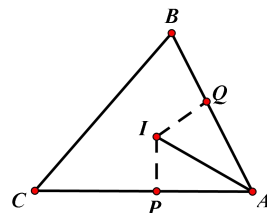
$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

(2) 三角形的“垂心”：伴随着垂直关系，即顶点与垂心的连线与底边垂直，从而可转化为向量数量积为零

(3) 三角形的“内心”：伴随着角平分线，由角平分线性质可知（如图）：

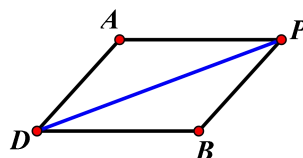
$IP \perp AC, IQ \perp AB$

$$I \text{ 在 } \angle BAC \text{ 的角平分线上} \Rightarrow |AP| = |AQ| \Rightarrow \frac{\vec{AI} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{\vec{AI} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

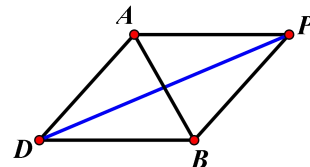


(4) P 是以 DA, DB 为邻边的平行四边形的顶点

$$\Rightarrow \vec{DP} = \vec{DA} + \vec{DB}$$



(5) P 是以 DA, DB 为邻边的菱形的顶点： P 在 AB 垂直平分线上



(6) 共线线段长度的乘积：若 A, B, C 共线，则线段的乘积可转化为向量的数量积，从而简化运算，（要注意向量的夹角）

$$\text{例如：} |AC| \cdot |AB| = \vec{AC} \cdot \vec{AB}, \quad |AC| \cdot |BC| = -\vec{AC} \cdot \vec{BC}$$

