

微专题 77 定点定直线问题

一、基础知识：

1、处理定点问题的思路：

- (1) 确定题目中的核心变量（此处设为 k ）
- (2) 利用条件找到 k 与过定点的曲线 $F(x, y) = 0$ 的联系，得到有关 k 与 x, y 的等式
- (3) 所谓定点，是指存在一个特殊的点 (x_0, y_0) ，使得无论 k 的值如何变化，等式恒成立。

此时要将关于 k 与 x, y 的等式进行变形，直至易于找到 x_0, y_0 。常见的变形方向如下：

- ① 若等式的形式为整式，则考虑将含 k 的项归在一组，变形为“ $k \cdot (\quad)$ ”的形式，从而 x_0, y_0 只需要先让括号内的部分为零即可
- ② 若等式为含 k 的分式， x_0, y_0 的取值一方面可以考虑使其分子为 0，从而分式与分母的取值无关；或者考虑让分子分母消去 k 的式子变成常数（这两方面本质上可以通过分离常数进行相互转化，但通常选择容易观察到的形式）

2、一些技巧与注意事项：

- (1) 面对复杂问题时，可从特殊情况入手，以确定可能的定点（或定直线）。然后再验证该点（或该直线）对一般情况是否符合。属于“先猜再证”。
- (2) 有些题目所求与定值无关，但是在条件中会隐藏定点，且该定点通常是解题的关键条件。所以当遇到含参数的方程时，要清楚该方程为一类曲线（或直线），从而观察这一类曲线是否过定点。尤其在含参数的直线方程中，要能够找到定点，抓住关键条件。例如：直线 $l: y = kx + k - 1$ ，就应该能够意识到 $y = k(x + 1) - 1$ ，进而直线绕定点 $(-1, -1)$ 旋转

二、典型例题：

例 1：椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，其左焦点到点 $P(2, 1)$ 的距离为 $\sqrt{10}$

(1) 求椭圆 C 的标准方程

(2) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点（ A, B 不是左右顶点），且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点。求证：直线 l 过定点，并求出该定点的坐标

解：(1) $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a : b : c = 2 : \sqrt{3} : 1$ ，设左焦点 $F_1(-c, 0)$

$$\therefore |PF_1| = \sqrt{(-c-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}, \text{ 解得 } c=1$$

$$\therefore a=2, b=\sqrt{3} \quad \therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(2) 由(1)可知椭圆右顶点 $D(2,0)$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $\therefore$ 以 AB 为直径的圆过 $D(2,0)$

$$\therefore DA \perp DB \text{ 即 } \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DB} \quad \therefore \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{DA} = (x_1 - 2, y_1), \overrightarrow{DB} = (x_2 - 2, y_2)$$

$$\therefore \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 + y_1 y_2 = 0 \quad ①$$

联立直线与椭圆方程：

$$\begin{cases} y = kx + m \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow (3 + 4k^2)x^2 + 8mkx + 4(m^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8mk}{4k^2 + 3}, x_1 x_2 = \frac{4(m^2 - 3)}{4k^2 + 3}$$

$$\therefore y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + mk(x_1 + x_2) + m^2$$

$$= \frac{4k^2(m^2 - 3)}{4k^2 + 3} - \frac{8mk \cdot mk}{4k^2 + 3} + m^2 = \frac{3m^2 - 12k^2}{4k^2 + 3}, \text{ 代入到①}$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{4(m^2 - 3)}{4k^2 + 3} + 2 \cdot \frac{8mk}{4k^2 + 3} + 4 + \frac{3m^2 - 12k^2}{4k^2 + 3} = 0$$

$$\therefore \frac{4m^2 - 12 + 16mk + 16k^2 + 12 + 3m^2 - 12k^2}{4k^2 + 3} = 0$$

$$\therefore 7m^2 + 16mk + 4k^2 = 0 \Rightarrow (7m + 2k)(m + 2k) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{2}{7}k \text{ 或 } m = -2k$$

$$\text{当 } m = -\frac{2}{7}k \text{ 时, } l: y = kx - \frac{2}{7}k = k\left(x - \frac{2}{7}\right) \quad \therefore l \text{ 恒过 } \left(\frac{2}{7}, 0\right)$$

$$\text{当 } m = -2k \text{ 时, } l: y = kx - 2k = k(x - 2) \quad \therefore l \text{ 恒过 } (2, 0), \text{ 但 } (2, 0) \text{ 为椭圆右顶点, 不符}$$

题意, 故舍去