微专题33 向量的模长问题——代数法

一、基础知识：

利用代数方法处理向量的模长问题，主要采取模长平方——数量积和坐标两种方式

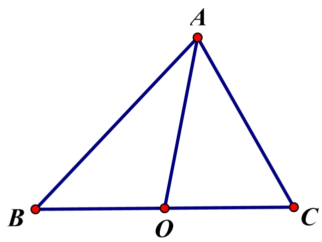
1、模长平方：通过 $\vec{a}^2=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$ 可得：$|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$，将模长问题转化为数量积问题，从而能够与条件中的已知向量（已知模长，夹角的基向量）找到联系。要注意计算完向量数量积后别忘记开方

2、坐标运算：若 $\vec{a}=(x,y)$，则 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$。某些题目如果能把几何图形放入坐标系中，则只要确定所求向量的坐标，即可求出（或表示）出模长

3、有关模长的不等问题：通常考虑利用“模长平方”或“坐标化”得到模长与某个变量间的函数关系，从而将问题转化为求函数最值问题

二、典型例题

例1：在 $\triangle ABC$ 中，O 为 BC 中点，若 $AB=1,AC=3,\angle A=60^\circ$，则 $|\overrightarrow{OA}|=$ ______



思路：题目条件有 $AB=1,AC=3,\angle A=60^\circ$，进而 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 可求，且 $\overrightarrow{OA}$ 可用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 表示，所以考虑模长平方转化为数量积问题

解：$\because O$ 为 BC 中点 $\therefore$ 可得：$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$$\therefore |\overrightarrow{AO}|^2=\overrightarrow{AO}^2=\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right]^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=\frac{3}{2}$$

代入可求出：$|\overrightarrow{AO}|^2=\frac{13}{4}$ $\quad\therefore|\overrightarrow{AO}|=\frac{\sqrt{13}}{2}$

答案：$\frac{\sqrt{13}}{2}$

例2：若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为单位向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\le 0$，则 $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$ 的最大值为（　　）

A. $\sqrt{2}-1$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

思路：题目中所给条件与模和数量积相关，几何特征较少，所以考虑将 $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$ 平方，转化

为数量积问题，再求最值。

解：$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\leq 0\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}^{\,2}\leq 0$ ①

$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=0,\left|\vec{c}\right|=1$ $\therefore$①转化为$-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}+1\leq 0\Rightarrow \vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}\geq 1$

$$\therefore\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$=1+1+1-2\left(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\leq 3-2=1$$

$\therefore\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|\leq 1$

答案：B

例 3：平面上的向量$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$满足$\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}\right|=4$，且$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，若$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$，则$\left|\overrightarrow{MC}\right|$的最小值为__________

思路：发现所给条件均与$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$相关，且$\overrightarrow{MC}$可以用$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$表示，所以考虑$\left|\overrightarrow{MC}\right|$进行模长平方，然后转化为$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$的运算。从而求出最小值

解：$\left|\overrightarrow{MC}\right|^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}\right)^2=\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{MA}^{\,2}+4\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MB}^{\,2}\right)$

$\because \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ $\left|\overrightarrow{MA}\right|^2=4-\left|\overrightarrow{MB}\right|$，代入可得：

$$\left|\overrightarrow{MC}\right|^2=\frac{1}{9}\left(4\left|\overrightarrow{MB}\right|^2+4-\left|\overrightarrow{MB}\right|\right)=\frac{1}{9}\left[4\left(\left|\overrightarrow{MB}\right|-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{63}{16}\right]\geq\frac{1}{9}\cdot\frac{63}{16}=\frac{7}{16}$$

$\therefore\left|\overrightarrow{MC}\right|_{\min}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

答案：$\frac{\sqrt{7}}{4}$

例 4：已知平面向量$\vec{\alpha},\vec{\beta}$满足$\left|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right|=\sqrt{3}$，且$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$与$\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$的夹角为$150^\circ$，则$\left|t\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)-\frac{3}{2}\vec{\beta}\right|\left(t\in R\right)$的最小值是（ ）

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

思路：题目所给条件围绕着$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$与$\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$，所以考虑所求向量用这两个向量进行表示：