

微专题 02 充分条件与必要条件

一、基础知识

1、定义：

(1) 对于两个条件 p, q ，如果命题“若 p 则 q ”是真命题，则称条件 p 能够推出条件 q ，记为 $p \Rightarrow q$ ，

(2) 充分条件与必要条件：如果条件 p, q 满足 $p \Rightarrow q$ ，则称条件 p 是条件 q 的充分条件；称条件 q 是条件 p 的必要条件

2、对于两个条件而言，往往以其中一个条件为主角，考虑另一个条件与它的关系，这种关系既包含充分方面，也包含必要方面。所以在判断时既要判断“若 p 则 q ”的真假，也要判断“若 q 则 p ”真假

3、两个条件之间可能的充分必要关系：

(1) p 能推出 q ，但 q 推不出 p ，则称 p 是 q 的充分不必要条件

(2) p 推不出 q ，但 q 能推出 p ，则称 p 是 q 的必要不充分条件

(3) p 能推出 q ，且 q 能推出 p ，记为 $p \Leftrightarrow q$ ，则称 p 是 q 的充要条件，也称 p, q 等价

(4) p 推不出 q ，且 q 推不出 p ，则称 p 是 q 的既不充分也不必要条件

4、如何判断两个条件的充分必要关系

(1) 通过命题手段，将两个条件用“若……，则……”组成命题，通过判断命题的真假来判断出条件能否相互推出，进而确定充分必要关系。例如 $p: x=1; q: x^2-1=0$ ，构造命题：“若 $x=1$ ，则 $x^2-1=0$ ”为真命题，所以 $p \Rightarrow q$ ，但“若 $x^2-1=0$ ，则 $x=1$ ”为假命题（ x 还有可能为 -1 ），所以 q 不能推出 p ；综上， p 是 q 的充分不必要条件

(2) 理解“充分”，“必要”词语的含义并定性的判断关系

① 充分：可从日常用语中的“充分”来理解，比如“小明对明天的考试做了充分的准备”，何谓“充分”？这意味着小明不需要再做任何额外的工作，就可以直接考试了。在逻辑中充分也是类似的含义，是指仅由 p 就可以得到结论 q ，而不需要再添加任何说明与补充。以上题为例，对于条件 $p: x=1$ ，不需再做任何说明或添加任何条件，就可以得到 $q: x^2-1=0$ 所以可以说 p 对 q 是“充分的”，而反观 q 对 p ，由 $q: x^2-1=0$ ，要想得到 $p: x=1$ ，还要补充一个前提： x 不能取 -1 ，那既然还要补充，则说明是“不充分的”

② 必要：也可从日常用语中的“必要”来理解，比如“心脏是人的一个必要器官”，何谓“必

要”? 没有心脏, 人不可活, 但是仅有心脏, 没有其他器官, 人也一定可活么? 所以“必要”体现的就是“没它不行, 但是仅有它也未必行”的含义。仍以上题为例: 如果 $q: x^2 - 1 = 0$ 不成立, 那么 x 必然不为 1, 但是仅靠 $q: x^2 - 1 = 0$ 想得到 $p: x = 1$ 也是远远不够的, 还需要更多的补充条件, 所以仅仅是“必要的”

(3) 运用集合作为工具

先看一个问题: 已知 $P \subseteq Q$, 那么条件“ $x \in P$ ”是“ $x \in Q$ ”的什么条件?

由 $P \subseteq Q$ 可得到: $x \in P \Rightarrow x \in Q$, 且 $x \in Q$ 推不出 $x \in P$, 所以“ $x \in P$ ”是“ $x \in Q$ ”充分不必要条件。通过这个问题可以看出, 如果两个集合存在包含关系, 那么其对应条件之间也存在特定的充分必要关系。在求解时可以将满足条件的元素构成对应集合, 判断出两个集合间的包含关系, 进而就可确定条件间的关系了。相关结论如下:

① $P \subseteq Q$: p 是 q 的充分不必要条件, q 是 p 的必要不充分条件

② $P \subsetneq Q$: p 是 q 的充分条件

③ $P = Q$: p 是 q 的充要条件

此方法适用范围较广, 尤其涉及到单变量取值范围的条件时, 不管是判断充分必要关系还是利用关系解参数范围, 都可将问题转化为集合的包含问题, 进而快捷求解。例如在

$p: x = 1; q: x^2 - 1 = 0$ 中, 满足 p 的 x 取值集合为 $P = \{1\}$, 而满足 q 的 x 取值集合为 $\{-1, 1\}$

所以 $P \subseteq Q$, 进而判断出 p 是 q 的充分不必要条件

5、关于“ $\neg p, \neg q$ ”的充分必要关系: 可从命题的角度进行判断。例如: p 是 q 的充分不必要条件, 则命题“若 p , 则 q ”为真命题, 根据四类命题的真假关系, 可得其逆否命题“若 $\neg q$, 则 $\neg p$ ”也为真命题。所以 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件

二、典型例题:

例 1: 已知 $p: |x - 3| < 1, q: x^2 + x - 6 > 0$, 则 p 是 q 的 ()

A. 充要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件

D. 既不充分也不必要条件

思路: 考虑利用集合求解: 分别解不等式得到对应集合。由 $|x - 3| < 1 \Rightarrow -1 < x - 3 < 1$, 解得:

$2 < x < 4$, 即 $P = \{x | 2 < x < 4\}$; 由 $x^2 + x - 6 > 0 \Rightarrow x < -3$ 或 $x > 2$, 即