

2024 年江苏省南京市雨花台中学高考数学三模试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

- (5 分) 集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -1 < x < 4\}$ 的子集个数为 ()
A. 2 B. 4 C. 8 D. 16
- (5 分) 将编号为 1, 2, 3, 4 的 4 个小球随机放入编号为 1, 2, 3, 4 的 4 个凹槽中，每个凹槽放一个小球，则至少有 2 个凹槽与其放入小球编号相同的概率是 ()
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{7}{24}$ C. $\frac{7}{12}$ D. $\frac{17}{24}$
- (5 分) 已知复数 z 满足 $|\overline{z} - z|^2 = z + \overline{z}$ ，则复数 z 在复平面内对应点的轨迹为 ()
A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 抛物线
- (5 分) 已知方程 $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha - 4 \cos \alpha = 0$ ，则 $\cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha =$ ()
A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
- (5 分) 在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别满足 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$ 。若 $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{AE} + \mu \overrightarrow{AF}$ ，则实数 $\lambda + \mu$ 的值为 ()
A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $-\frac{7}{5}$ D. $\frac{7}{5}$
- (5 分) 已知 $e^a = \lg 3$ ， $b = \lg(\ln 3)$ ， $c = \ln \frac{1}{3}$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()
A. $c < b < a$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$
- (5 分) 已知球 O 的直径为 $PC = 2\sqrt{3}$ ， A, B 是球面上两点，且 $PA = PB = \sqrt{3}$ ， $\angle APB = \frac{\pi}{3}$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积 ()
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\sqrt{6}$
- (5 分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ， P 是双曲线上不同于 A_1, A_2 的一点，设直线 A_1P, A_2P 的斜率分别为 k_1, k_2 ，则当 $\frac{a}{b} + \ln(k_1 k_2)$ 取得最小值时，双曲线 C 的离心率为 ()
A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

（多选）9.（6分）下列命题中正确的是（ ）

A. 已知随机变量 $X \sim B(6, \frac{1}{3})$, 则 $D(3X+2) = 12$

B. $P(B) = P(AB) + P(\overline{AB})$

C. 已知一组数据：7, 7, 8, 9, 5, 6, 8, 8, 则这组数据的第 30 百分位数是 8

D. 某小组调查 5 名男生和 5 名女生的成绩，其中男生成绩的平均数为 9，方差为 11；女生成绩的平均数为 7，方差为 8，则这 10 名学生成绩的方差为 10.5

（多选）10.（6分）在棱长为 3 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M 是 A_1B_1 的中点， N 在该正方体的棱上运动，则下列说法正确的是（ ）

A. 存在点 N ，使得 $MN \parallel BC_1$

B. 三棱锥 $M - A_1BC_1$ 的体积等于 $\frac{9}{4}$

C. 有且仅有两个点 N ，使得 $MN \parallel$ 平面 A_1BC_1

D. 有且仅有三个点 N ，使得 N 到平面 A_1BC_1 的距离为 $\sqrt{3}$

（多选）11.（6分）下列等式中正确的是（ ）

A. $\sum_{k=1}^8 C_8^k = 2^8$

B. $\sum_{k=2}^8 C_k^2 = C_9^3$

C. $\sum_{k=2}^8 \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{8!}$

D. $\sum_{k=0}^8 (C_8^k)^2 = C_{16}^8$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12.（5分）已知圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ ，过点 $M(1, 3)$ 的直线 l 交圆 O 于 A, B 两点，且 $|AB| = 2$ ，则直线 l 的方程为 _____.

13.（5分）分形几何学的创立为解决传统科学众多领域的难题提供了全新的思路. 图 1 是长度为 1 的线段，将图 1 中的线段三等分，以中间部分的线段为边，向外作等边三角形，再将中间部分的线段去掉得到图 2，称为“一次分形”；用同样的方法把图 2 中的每条线段重复上述操作，得到图 3，称为“二次分形”……，依次进行“ n 次分形”（ $n \in \mathbf{N}^*$ ）. 规定：一个分形图中所有线段的长度之和为该分形图的长度，要得到一个长度不小于 30 的分形图，则 n 的最小整数值是 _____.（取 $\lg 3 \approx 0.4771$, $\lg 2 \approx 0.3010$ ）