微专题24 恒成立问题——最值分析法

最值法求解恒成立问题是三种方法中最为复杂的一种，但往往会用在解决导数综合题目中的恒成立问题。此方法考研学生对所给函数的性质的了解，以及对含参问题分类讨论的基本功。是导数中的难点问题。

一、基础知识：

1、最值法的特点：

（1）构造函数时往往将参数与自变量放在不等号的一侧，整体视为一个函数，其函数含参

（2）参数往往会出现在导函数中，进而参数不同的取值会对原函数的单调性产生影响——可能经历分类讨论

2、理论基础：设$f\left(x\right)$的定义域为D

（1）若$\forall x\in D$，均有$f\left(x\right)\leq C$（其中C为常数），则$f\left(x\right)_{\max}\leq C$

（2）若$\forall x\in D$，均有$f\left(x\right)\geq C$（其中C为常数），则$f\left(x\right)_{\min}\geq C$

3、技巧与方法：

（1）最值法解决恒成立问题会导致所构造的函数中有参数，进而不易分析函数的单调区间，所以在使用最值法之前可先做好以下准备工作：

① 观察函数$f\left(x\right)$的零点是否便于猜出（注意边界点的值）

② 缩小参数与自变量的范围：

通过代入一些特殊值能否缩小所求参数的讨论范围（便于单调性分析）

观察在定义域中是否包含一个恒成立的区间（即无论参数取何值，不等式均成立），缩小自变量的取值范围

（2）首先要明确导函数对原函数的作用：即导函数的符号决定原函数的单调性。如果所构造的函数，其导数结构比较复杂不易分析出单调性，则可把需要判断符号的式子拿出来构造一个新函数，再想办法解决其符号。

（3）在考虑函数最值时，除了依靠单调性，也可根据最值点的出处，即“只有边界点与极值点才是最值点的候选点”，所以有的讨论点就集中在“极值点”是否落在定义域内。

二、典型例题：

例1：设$f\left(x\right)=x^2-2mx+2$，当$x\in\left[-1,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)\geq m$恒成立，求$m$的取值范围

思路：恒成立不等式为 $x^2-2mx+2-m\ge 0$，只需 $\left(x^2-2mx+2-m\right)_{\min}\ge 0$，由于左端是关于 x 的二次函数，容易分析最值点位置，故选择最值法

解：恒成立不等式为 $x^2-2mx+2-m\ge 0$，令 $g\left(x\right)=x^2-2mx+2-m$ 则对称轴为 $x=m$

（1）当 $m\le -1$ 时，$g\left(x\right)$ 在 $\left[-1,+\infty\right)$ 单调递增，$\therefore g\left(x\right)_{\min}=g\left(-1\right)=1+2m+2-m\ge 0$

$\therefore m\ge -3$ 即 $m\in\left[-3,-1\right]$

（2）当 $m>-1$ 时，$g\left(x\right)$ 在 $\left(-1,m\right)$ 单调递减，在 $\left(m,+\infty\right)$ 单调递增

$\therefore g\left(x\right)_{\min}=g\left(m\right)=m^2-2m^2+2-m\ge 0\Rightarrow -2\le m\le 1$

$\therefore m\in\left(-1,1\right]$　　终上所述：$m\in\left[-3,1\right]$

小炼有话说：二次函数以对称轴为分解，其单调性与最值容易分析。所以二次恒成立不等式往往可考虑利用最值法，此题中对称轴是否在区间内将决定最值的取值，故以此为分类讨论点。

思路二：从另一个角度看，本题 m,x 容易进行分离，所以也可考虑参变分离法

解：$x^2-2mx+2-m\ge 0\Leftrightarrow\left(2x+1\right)m\le x^2+2$

（1）$2x+1>0\Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}$ 时，则 $m\le\left(\dfrac{x^2+2}{2x+1}\right)_{\min}$　（由于 m 系数符号未定，故分类讨论进行参变分离）

令 $t=2x+1,t>0$（换元时注意更新新元的取值范围）

则 $\dfrac{x^2+2}{2x+1}=\dfrac{\dfrac{\left(t-1\right)^2}{4}+2}{t}=\dfrac{t^2-2t+9}{4t}=\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{9}{t}-2\right)\ge 1$

（2）$2x+1=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$，不等式对任意的 m 均成立

（3）$2x+1<0\Rightarrow x<-\dfrac{1}{2}$，$m\ge\left(\dfrac{x^2+2}{2x+1}\right)_{\max}$（注意不等号变号！！）

令 $t=2x+1,-1\le t<0$，则 $\dfrac{x^2+2}{2x+1}=\dfrac{\dfrac{\left(t-1\right)^2}{4}+2}{t}=\dfrac{t^2-2t+9}{4t}=\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{9}{t}-2\right)\le -3$

$\therefore m\ge -3$