# 微专题 23 恒成立问题——数形结合法

一、基础知识：

1、函数的不等关系与图像特征：

（1）若 $\forall x \in D$，均有 $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)$ 的图像始终在 $g(x)$ 的下方

（2）若 $\forall x \in D$，均有 $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x)$ 的图像始终在 $g(x)$ 的上方

2、在作图前，可利用不等式的性质对恒成立不等式进行变形，转化为两个可作图的函数

3、要了解所求参数在图像中扮演的角色，如斜率，截距等

4、作图时可“先静再动”，先作常系数的函数的图像，再做含参数函数的图象（往往随参数的不同取值而发生变化）

5、在作图时，要注意草图的信息点尽量完备

6、什么情况下会考虑到数形结合？利用数形结合解决恒成立问题，往往具备以下几个特点：

（1）所给的不等式运用代数手段变形比较复杂，比如分段函数，或者定义域含参等，而涉及的函数便于直接作图或是利用图像变换作图

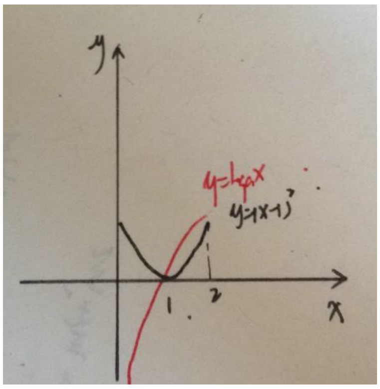
（2）所求的参数在图像中具备一定的几何含义

（3）题目中所给的条件大都能翻译成图像上的特征

二、典型例题：

例 1：已知不等式 $(x-1)^2 < \log_a x$ 在 $x \in (1,2)$ 上恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是________

思路：本题难于进行参变分离，考虑数形结合解决，先作出 $y=(x-1)^2$ 的图像，观察图像可得：若要使不等式成立，则 $y=\log_a x$ 的图像应在 $y=(x-1)^2$ 的上方，所以应为单增的对数函数，即 $a>1$，另一方面，观察图像可得：若要保证在 $x \in (1,2)$ 时不等式成立，只需保证在 $x=2$ 时，$(x-1)^2 < \log_a x$ 即可，代入 $x=2$ 可得：$1 \le \log_a 2 \Rightarrow a \le 2$，综上可得：$1 < a \le 2$




答案：$1 < a \le 2$

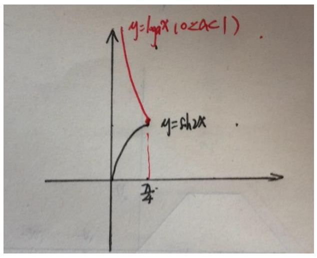
小炼有话说：（1）通过常系数函数图像和恒成立不等式判断出对数函数的单调性，进而缩小了参数讨论的取值范围。

（2）学会观察图像时要抓住图像特征并抓住符合条件的关键点（例如本题中的 $x=2$）

（3）处理好边界值是否能够取到的问题

例 2：若不等式 $\log_a x > \sin 2x (a>0, a\neq 1)$ 对于任意的 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 都成立，则实数 $a$ 的取值范围是__________

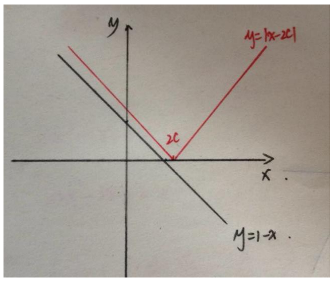
思路：本题选择数形结合，可先作出 $y=\sin 2x$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 的图像，$a$ 扮演的角色为对数的底数，决定函数的增减，根据不等关系可得 $0<a<1$，观察图像进一步可得只需 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$\log_a x \geq \sin 2x$，即 $\log_a \frac{\pi}{4} > \sin 2\cdot\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow a > \frac{\pi}{4}$，所以 $a\in\left(\frac{\pi}{4},1\right)$




答案：$a\in\left(\frac{\pi}{4},1\right)$

例 3：若不等式 $x+|x-2c|>1$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，求 $c$ 的取值范围

思路：恒成立不等式变形为 $|x-2c|>1-x$，即 $y=|x-2c|$ 的图像在 $y=1-x$ 图像的上方即可，先作出 $y=1-x$ 的图像，对于 $y=|x-2c|$，可看作 $y=|x|$ 经过平移得到，而平移的距离与 $c$ 的取值有关。通过观察图像，可得只需 $2c>1$，解得：$c>\frac{1}{2}$




答案：　$c>\frac{1}{2}$

小炼有话说：在本题中参数 $c$ 的作用是决定图像平移变换的程度，要抓住参数在图像中的作用，从而在数形结合中找到关于参数的范围要求

例 4：若 $|p|\leq 2$，不等式 $x^2+px+1>2p+x$ 恒成立，则 $x$ 的取值范围是______

思路：本题中已知 $p$ 的范围求 $x$ 的范围，故构造函数时可看作关于 $p$ 的函数，恒成立不等式变形为 $(x-2)p+x^2-x+1>0$，设 $f(x)=(x-2)p+x^2-x+1(-2\leq p\leq 2)$，即关于 $p$ 的一次函数，由图像可得：无论直线方向如何，若要 $f(x)>0$，只需在端点处函数值均大于