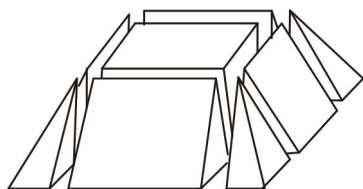


## 2024 年江苏省常州市前黄高级中学高考数学一模试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

- （5 分）设全集为  $U$ ，定义集合  $A$  与  $B$  的运算： $A \# B = \{x | x \in A \cup B \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$ ，则  $(A \# B) \# A =$  ( )  
 A.  $A$                       B.  $B$                       C.  $A \cap \complement_U B$                       D.  $B \cap \complement_U A$
- （5 分）已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{3}$ ，且  $(\vec{a}+\vec{b}) \perp \vec{b}$ ，则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为 ( )  
 A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{2\pi}{3}$                       D.  $\frac{5\pi}{6}$
- （5 分）“ $\log_2 a > \log_2 b$ ”是“ $2^a > 2^b$ ”的 ( )  
 A. 充分不必要条件  
 B. 必要不充分条件  
 C. 充分且不必要条件  
 D. 既不充分也不必要条件

- （5 分）如图，将正四棱台切割成九个部分，其中一个部分为长方体，四个部分为直三棱柱，四个部分为四棱锥. 已知每个直三棱柱的体积为 3，每个四棱锥的体积为 1，则该正四棱台的体积为 ( )



- A. 36                      B. 32                      C. 28                      D. 24
- （5 分）已知  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，且  $\tan \beta = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ ，则  $\sin(\alpha + 2\beta) =$  ( )  
 A. 1                      B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{1}{2}$
- （5 分）已知一个玻璃酒杯盛酒部分的轴截面是抛物线，其口径长为 1，现有一个半径为  $r$  ( $r > 0$ ) 的玻璃球放入该玻璃酒杯中，要使得该玻璃球接触到杯底（盛酒部分），则  $r$  的取值范围是 ( )  
 A.  $(0, 2]$                       B.  $[\frac{1}{2}, 2]$                       C.  $(0, \frac{1}{2}]$                       D.  $(0, \frac{1}{4}]$
- （5 分）设实数  $x, y$  满足  $x > \frac{3}{2}, y > 3$ ，不等式  $k(2x - 3)(y - 3) \leq 8x^3 + y^3 - 12x^2 - 3y^2$  恒成立，则实数  $k$  的最大值为 ( )  
 A. 12                      B. 24                      C.  $2\sqrt{3}$                       D.  $4\sqrt{3}$
- （5 分）已知函数  $y = axe^x$  与  $y = \ln x + x$  的图象有两个交点，则实数  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $(0, \frac{1}{e})$       B.  $(0, \frac{2}{e})$       C.  $(-\infty, \frac{1}{e})$       D.  $(-\infty, \frac{2}{e})$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

（多选）9. （6 分）若  $m, n$  为正整数且  $n > m > 1$ ，则（ ）

- A.  $C_8^3 = C_8^5$   
 B.  $C_7^3 = \frac{A_7^3}{4!}$   
 C.  $mC_n^m = (n-1)C_{n-1}^{m-1}$   
 D.  $A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m$

（多选）10. （6 分）已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ， $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ，则（ ）

- A.  $S_{13} = 13S_7$   
 B.  $S_5 = 4a_2 + a_7$   
 C. 若  $\{na_n\}$  为等差数列，则  $d = -1$   
 D. 若  $\{\sqrt{S_n}\}$  为等差数列，则  $d = 2a_1$

（多选）11. （6 分）在平面直角坐标系中，将函数  $f(x)$  的图象绕坐标原点逆时针旋转  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 90^\circ$ ) 后，所得曲线仍然是某个函数的图象，则称  $f(x)$  为“ $\alpha$  旋转函数”。那么（ ）

- A. 存在  $90^\circ$  旋转函数  
 B.  $80^\circ$  旋转函数一定是  $70^\circ$  旋转函数  
 C. 若  $g(x) = ax + \frac{1}{x}$  为  $45^\circ$  旋转函数，则  $a = 1$   
 D. 若  $h(x) = \frac{bx}{e^x}$  为  $45^\circ$  旋转函数，则  $-e^2 \leq b \leq 0$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. （5 分） $(2 + \frac{x}{y})(x - 2y)^6$  的展开式中  $x^4y^2$  的系数为 \_\_\_\_\_。（用数字作答）

13. （5 分）已知  $P$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = \lambda$  ( $\lambda > 0$ ) 上任意一点，若  $P$  到  $C$  的两条渐近线的距离之积为  $\frac{2}{3}$ ，则  $C$  上的点到焦点距离的最小值为 \_\_\_\_\_。

14. （5 分）在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，球  $O_1$  同时与以  $A$  为公共顶点的三个面相切，球  $O_2$  同时与以  $C_1$  为公共顶点的三个面相切，且两球相切于点  $F$ 。若以  $F$  为焦点， $AB_1$  为准线的抛物线经过  $O_1, O_2$ ，