

微专题 39 传统不等式的解法

一、基础知识

1、一元二次不等式： $ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0)$

可考虑将左边视为一个二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，作出图像，再找出 x 轴上方的部分即可——关键点：图像与 x 轴的交点

2、高次不等式

(1) 可考虑采用“数轴穿根法”，分为以下步骤：（令关于 x 的表达式为 $f(x)$ ，不等式为

$$f(x) > 0$$

① 求出 $f(x) = 0$ 的根 x_1, x_2, \dots

② 在数轴上依次标出根

③ 从数轴的右上方开始，从右向左画。如同穿针引线穿过每一个根

④ 观察图像， $f(x) > 0 \Rightarrow$ 寻找 x 轴上方的部分

$$f(x) < 0 \Rightarrow \text{寻找 } x \text{ 轴下方的部分}$$

(2) 高次不等式中的偶次项，由于其非负性在解不等式过程中可以忽略，但是要验证偶次项为零时是否符合不等式

3、分式不等式

(1) 将分母含有 x 的表达式称为分式，即为 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的形式

(2) 分式若成立，则必须满足分母不为零，即 $g(x) \neq 0$

(3) 对形如 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ 的不等式，可根据符号特征得到只需 $f(x), g(x)$ 同号即可，所以将

$$\text{分式不等式转化为} \begin{cases} f(x) \cdot g(x) > 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \quad (\text{化商为积}), \text{进而转化为整式不等式求解}$$

4、含有绝对值的不等式

(1) 绝对值的属性：非负性

(2) 式子中含有绝对值，通常的处理方法有两种：一是通过对绝对值内部符号进行分类讨论（常用）；二是通过平方

(3) 若不等式满足以下特点，可直接利用公式进行变形求解：

① $|f(x)| > g(x)$ 的解集与 $f(x) > g(x)$ 或 $f(x) < -g(x)$ 的解集相同

② $|f(x)| < g(x)$ 的解集与 $-g(x) < f(x) < g(x)$ 的解集相同

(4) 对于其它含绝对值的问题，则要具体问题具体分析，通常可用的手段就是先利用分类讨论去掉绝对值，将其转化为整式不等式，再做处理

5、指对数不等式的解法：

(1) 先讲一个不等式性质与函数的故事

在不等式的基本性质中，有一些性质可从函数的角度分析，例如： $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ ，可发现不等式的两边做了相同的变换（均加上 c ），将**相同的变换视为一个函数**，即设 $f(x) = x + c$ ，则 $a + c = f(a), b + c = f(b)$ ，因为 $f(x) = x + c$ 为增函数，所以可得：

$$a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b), \text{ 即 } a > b \Rightarrow a + c > b + c \text{ 成立, 再例如: } a > b \Rightarrow \begin{cases} c > 0, ac > bc \\ c < 0, ac < bc \end{cases},$$

可设函数 $f(x) = cx$ ，可知 $c > 0$ 时， $f(x)$ 为增函数， $c < 0$ 时， $f(x)$ 为减函数，即

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} c > 0, f(a) > f(b) \\ c < 0, f(a) < f(b) \end{cases}$$

由以上两个例子我们可以得出：对于不等式两边作相同变换的性质，可将变换视为一个函数，则在变换时不等号是否发生改变，取决于函数的增减性。**增函数→不变号，减函数→变号**

在这种想法的支持下，我们可以对不等式的变形加以扩展，例如： $a > b$ ，则 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ 的关系如何？设 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，可知 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ ，由此可判断出：当 a, b 同号时， $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(2) 指对数不等式：解指对数不等式，我们也考虑将其转化为整式不等式求解，那么在指数变换的过程中，不等号的方向是否变号呢？先回顾指数函数的性质：无论是 $y = a^x$ 还是 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ ，其单调性只与底数 a 有关：当 $a > 1$ 时，函数均为增函数，当 $0 < a < 1$ 时，函数均为减函数，由此便可知，不等号是否发生改变取决于底数与 1 的大小，规律如下：

$$a > 1 \text{ 时, } x > y \begin{cases} \Leftrightarrow a^x > a^y \\ \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y (x, y > 0) \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \text{ 时, } x > y \begin{cases} \Leftrightarrow a^x < a^y \\ \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y (x, y > 0) \end{cases}$$

进而依据这两条便可将指对不等式转化为整式不等式求解了

(3) 对于对数的两个补充

① 对数能够成立，要求真数大于 0，所以在解对数不等式时首先要考虑真数大于 0 这个条件，