

微专题 45 利用均值不等式求最值

一、基础知识：

1、高中阶段涉及的几个平均数：设 $a_i > 0 (i=1,2,\dots,n)$

$$(1) \text{ 调和平均数: } H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$(2) \text{ 几何平均数: } G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$(3) \text{ 代数平均数: } A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$(4) \text{ 平方平均数: } Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

2、均值不等式： $H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$ ，等号成立的条件均为： $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

特别的，当 $n=2$ 时， $G_2 \leq A_2 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 即基本不等式

3、基本不等式的几个变形：

(1) $a+b \geq 2\sqrt{ab} (a,b>0)$ ：多用在求和式的最小值且涉及求和的项存在乘积为定值的情况

(2) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ：多用在求乘积式的最大值且涉及乘积的项存在和为定值的情况

(3) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，本公式虽然可由基本不等式推出，但本身化成完全平方式也可证明，要注意此不等式的适用范围 $a,b \in R$

4、利用均值不等式求最值遵循的原则：“一正二定三等”

(1) 正：使用均值不等式所涉及的项必须为正数，如果有负数则考虑变形或使用其它方法

(2) 定：使用均值不等式求最值时，变形后的一侧不能还含有核心变量，例如：当 $x > 0$ ，求 $y = x^2 + \frac{3}{x}$ 的最小值。此时若直接使用均值不等式，则 $y = x^2 + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{4x}$ ，右侧依然含有 x ，则无法找到最值。

① 求和的式子 $\rightarrow$ 乘积为定值。例如：上式中 $y = x^2 + \frac{4}{x}$ 为了乘积消掉 x ，则要将 $\frac{4}{x}$ 拆为两个

$$\frac{2}{x}, \text{ 则 } y = x^2 + \frac{4}{x} = x^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x}} = 3\sqrt[3]{4}$$

② 乘积的式子→和为定值，例如 $0 < x < \frac{3}{2}$ ，求 $f(x) = x(3-2x)$ 的最大值。则考虑变积为

$$\text{和后保证 } x \text{ 能够消掉，所以 } f(x) = x(3-2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(3-2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x+3-2x}{2} \right)^2 = \frac{9}{8} \quad (3)$$

等：若能利用均值不等式求得最值，则要保证等号成立，要注意以下两点：

① 若求最值的过程中多次使用均值不等式，则均值不等式等号成立的条件必须能够同时成立（彼此不冲突）

② 若涉及的变量有初始范围要求，则使用均值不等式后要解出等号成立时变量的值，并验证是否符合初始范围。

5、常见求最值的题目类型

(1) 构造乘积与和为定值的情况，如上面所举的两个例子

(2) 已知 $ax + by = 1$ (a 为常数)，求 $\frac{m}{x} + \frac{n}{y}$ 的最值，

此类问题的特点在于已知条件中变量位于分子（或分母）位置上，所求表达式变量的位置恰好相反，位于分母（或分子）上，则可利用常数“1”将已知与所求进行相乘，从而得到常数项与互为倒数的两项，然后利用均值不等式求解。

例如：已知 $x > 0, y > 0, 2x + 3y = 1$ ，求 $\frac{3}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值

$$\text{解：} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{y} \right) (2x + 3y) = 6 + \frac{9y}{x} + \frac{4x}{y} + 6$$

$$= 12 + \frac{9y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 12 + 2\sqrt{\frac{9y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} = 24$$

(3) 运用均值不等式将方程转为所求式子的不等式，通过解不等式求解：

例如：已知 $x > 0, y > 0, 2x + y + xy = 4$ ，求 $2x + y$ 的最小值

$$\text{解：} xy = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x+y}{2} \right)^2 = \frac{(2x+y)^2}{8}$$

$$\text{所以 } 2x + y + xy = 4 \Rightarrow (2x + y) + \frac{(2x+y)^2}{8} \geq 4$$

$$\text{即 } (2x+y)^2 + 8(2x+y) - 32 \geq 0, \text{ 可解得 } 2x+y \geq 4\sqrt{3}-4, \text{ 即 } (2x+y)_{\min} = 4\sqrt{3}-4$$