

微专题 25 定积分

一、基础知识

1、相关术语：对于定积分 $\int_a^b f(x)dx$

(1) a, b : 称为积分上下限，其中 $a \geq b$

(2) $f(x)$: 称为被积函数

(3) dx : 称为微分符号，当被积函数含参数时，微分符号可以体现函数的自变量是哪个，例如： $\int_a^b (x^2 + tx)dx$ 中的被积函数为 $f(x) = x^2 + tx$ ，而 $\int_a^b (x^2 + tx)dt$ 的被积函数为 $f(t) = xt + x^2$

2、定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义：表示函数 $f(x)$ 与 x 轴， $x = a, x = b$ 围成的面积（ x 轴上方部分为正， x 轴下方部分为负）和，所以只有当 $f(x)$ 图像在 $[a, b]$ 完全位于 x 轴上方时， $\int_a^b f(x)dx$ 才表示面积。 $\int_a^b |f(x)|dx$ 可表示数 $f(x)$ 与 x 轴， $x = a, x = b$ 围成的面积的总和，但是在求定积分时，需要拆掉绝对值分段求解

3、定积分的求法：高中阶段求定积分的方法通常有 2 种：

(1) 微积分基本定理：如果 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数，并且 $F'(x) = f(x)$ ，那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

使用微积分基本定理，关键是能够找到以 $f(x)$ 为导函数的原函数 $F(x)$ 。所以常见的初等函数的导函数公式要熟记于心：

$f(x) = C$	$f'(x) = 0$	$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

① 寻找原函数通常可以“先猜再调”，先根据导函数的形式猜出原函数的类型，再调整系数，例如： $f(x) = x^3$ ，则判断属于幂函数类型，原函数应含 x^4 ，但 $(x^4)' = 4x^3$ ，而 $f(x) = x^3$ ，

所以原函数为 $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$ (C 为常数)

② 如果只是求原函数，则要在表达式后面加上常数 C ，例如 $f(x) = 2x$ ，则 $F(x) = x^2 + C$ ，但在使用微积分基本定理时，会发现 $F(b) - F(a)$ 计算时会消去 C ，所以求定积分时， $F(x)$ 不需加上常数。

(2) 利用定积分的几何含义：若被积函数找不到原函数，但定积分所对应的曲边梯形面积易于求解，则可通过求曲边梯形的面积求定积分。但要注意曲边梯形若位于 x 轴的下方，则面积与所求定积分互为相反数。

4、定积分的运算性质：假设 $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$ 存在

$$(1) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

作用：求定积分时可将 $f(x)$ 的系数放在定积分外面，不参与定积分的求解，从而简化 $f(x)$ 的复杂程度

$$(2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

作用：可将被积函数拆成一个个初等函数的和，从而便于寻找原函数并求出定积分，例如

$$\int_1^2 (x^2 + x + 1)dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 x dx + \int_1^2 1 dx$$

$$(3) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ 其中 } a < c < b$$

作用：当被积函数含绝对值，或者是分段函数时，可利用此公式将所求定积分按区间进行拆分，分别求解。

5、若 $f(x)$ 具备奇偶性，且积分限关于原点对称，则可利用奇偶性简化定积分的计算

$$(1) \text{ 若 } f(x) \text{ 为奇函数，则 } \int_{-a}^a f(x)dx = 0 (a > 0)$$

$$(2) \text{ 若 } f(x) \text{ 为偶函数，则 } \int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx (a > 0)$$

6、利用定积分求曲面梯形面积的步骤：

(1) 通过作图确定所求面积的区域

(2) 确定围成区域中上，下曲线对应的函数 $f(x), g(x)$

(3) 若 $x \in [a, b]$ 时，始终有 $f(x) \geq g(x)$ ，则该处面积为 $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

7、有的曲面梯形面积需用多个定积分的和进行表示。需分段通常有两种情况