

微专题 50 等比数列性质

一、基础知识

1、定义：数列 $\{a_n\}$ 从第二项开始，后项与前一項的比值为同一个常数 $q(q \neq 0)$ ，则称 $\{a_n\}$ 为等比数列，这个常数 q 称为数列的公比

注：非零常数数列既可视作等差数列，也可视为 $q=1$ 的等比数列，而常数数列 $0,0,0,\dots$ 只是等差数列

2、等比数列通项公式： $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ，也可以为： $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$

3、等比中项：若 a, b, c 成等比数列，则 b 称为 a, c 的等比中项

(1) 若 b 为 a, c 的等比中项，则有 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = ac$

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $\forall n \in N^*$ ， a_{n+1} 均为 a_n, a_{n+2} 的等比中项

(3) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则有 $m+n = p+q \Leftrightarrow a_m a_n = a_p a_q$

4、等比数列前 n 项和公式：设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n

当 $q=1$ 时，则 $\{a_n\}$ 为常数数列，所以 $S_n = na_1$

当 $q \neq 1$ 时，则 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

可变形为： $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{q-1}q^n - \frac{a_1}{q-1}$ ，设 $k = \frac{a_1}{q-1}$ ，可得： $S_n = k \cdot q^n - k$

5、由等比数列生成的新等比数列

(1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，等间距的抽取一些项组成的新数列仍为等比数列

(2) 已知等比数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ，则有

① 数列 $\{ka_n\}$ (k 为常数) 为等比数列

② 数列 $\{a_n^\lambda\}$ (λ 为常数) 为等比数列，特别的，当 $\lambda = -1$ 时，即 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等比数列

③ 数列 $\{a_n b_n\}$ 为等比数列

④ 数列 $\{|a_n|\}$ 为等比数列

6、相邻 k 项和的比值与公比 q 相关：

设 $S = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k}, T = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}$ ，则有：

$$\frac{S}{T} = \frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k}}{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}} = \frac{a_m(q + q^2 + \cdots + q^k)}{a_n(q + q^2 + \cdots + q^k)} = \frac{a_m}{a_n} = q^{n-m}$$

特别的：若 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = S_k, a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k} = S_{2k} - S_k$,

$a_{2k+1} + a_{2k+2} + \cdots + a_{3k} = S_{3k} - S_{2k}, \cdots$ ，则 $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, \cdots$ 成等比数列

7、等比数列的判定：（假设 $\{a_n\}$ 不是常数列）

(1) 定义法（递推公式）： $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q (n \in N^*)$

(2) 通项公式： $a_n = k \cdot q^n$ （指数类函数）

(3) 前 n 项和公式： $S_n = kq^n - k$

注：若 $S_n = kq^n - m (m \neq k)$ ，则 $\{a_n\}$ 是从第二项开始成等比关系

(4) 等比中项：对于 $\forall n \in N^*$ ，均有 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$

8、非常数等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 前 n 项和 T_n 的关系

$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ，因为 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1}$ ，公比为 $\frac{1}{q}$ 的等比数列，所以有

$$T_n = \frac{\frac{1}{a_1} \left[1 - \left(\frac{1}{q} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{\frac{q^n - 1}{q^n}}{a_1 \cdot \frac{q-1}{q}} = \frac{q^n - 1}{a_1 q^{n-1} (q-1)}$$

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \cdot \frac{a_1 q^{n-1} (q-1)}{q^n - 1} = a_1^2 q^{n-1}$$

例 1：已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为正数，且 $a_2 = 1, a_3 a_9 = 2a_5^2$ ，则 $a_{10} =$ _____

思路：因为 $a_3 a_9 = a_6^2$ ，代入条件可得： $a_6^2 = 2a_5^2$ ，因为 $q > 0$ ，所以 $a_6 = \sqrt{2}a_5$ ， $q = \sqrt{2}$

所以 $a_{10} = a_2 q^8 = 16$