微专题12 复合函数零点问题

一、基础知识：

1、复合函数定义：设 $y=f\left(t\right)$，$t=g\left(x\right)$，且函数 $g\left(x\right)$ 的值域为 $f\left(t\right)$ 定义域的子集，那么 y 通过 t 的联系而得到自变量 x 的函数，称 y 是 x 的复合函数，记为 $y=f\left[g\left(x\right)\right]$

2、复合函数函数值计算的步骤：求 $y=g\left[f\left(x\right)\right]$ 函数值遵循“由内到外”的顺序，一层层求出函数值。例如：已知 $f\left(x\right)=2^x,g\left(x\right)=x^2-x$，计算 $g\left[f\left(2\right)\right]$

解：$f\left(2\right)=2^2=4\quad \therefore g\left[f\left(2\right)\right]=g\left(4\right)=12$

3、已知函数值求自变量的步骤：若已知函数值求 x 的解，则遵循“由外到内”的顺序，一层层拆解直到求出 x 的值。例如：已知 $f\left(x\right)=2^x$，$g\left(x\right)=x^2-2x$，若 $g\left[f\left(x\right)\right]=0$，求 x

解：令 $t=f\left(x\right)$，则 $g\left(t\right)=0\Rightarrow t^2-2t=0$ 解得 $t=0,t=2$

当 $t=0\Rightarrow f\left(x\right)=0\Rightarrow 2^x=0$，则 $x\in\varnothing$

当 $t=2\Rightarrow f\left(x\right)=2\Rightarrow 2^x=2$，则 $x=1$

综上所述：$x=1$

由上例可得，要想求出 $g\left[f\left(x\right)\right]=0$ 的根，则需要先将 $f\left(x\right)$ 视为整体，先求出 $f\left(x\right)$ 的值，再求对应 x 的解，这种思路也用来解决复合函数零点问题，先回顾零点的定义：

4、函数的零点：设 $f\left(x\right)$ 的定义域为 D，若存在 $x_0\in D$，使得 $f\left(x_0\right)=0$，则称 $x=x_0$ 为 $f\left(x\right)$ 的一个零点

5、复合函数零点问题的特点：考虑关于 x 的方程 $g\left[f\left(x\right)\right]=0$ 根的个数，在解此类问题时，要分为两层来分析，第一层是解关于 $f\left(x\right)$ 的方程，观察有几个 $f\left(x\right)$ 的值使得等式成立；第二层是结合着第一层 $f\left(x\right)$ 的值求出每一个 $f\left(x\right)$ 被几个 x 对应，将 x 的个数汇总后即为 $g\left[f\left(x\right)\right]=0$ 的根的个数

6、求解复合函数 $y=g\left[f\left(x\right)\right]$ 零点问题的技巧：

（1）此类问题与函数图象结合较为紧密，在处理问题的开始要作出 $f\left(x\right),g\left(x\right)$ 的图像

（2）若已知零点个数求参数的范围，则先估计关于 $f\left(x\right)$ 的方程 $g\left[f\left(x\right)\right]=0$ 中 $f\left(x\right)$ 解的个数，再根据个数与 $f\left(x\right)$ 的图像特点，分配每个函数值 $f_i\left(x\right)$ 被几个 x 所对应，从而确定 $f_i\left(x\right)$ 的取值范围，进而决定参数的范围

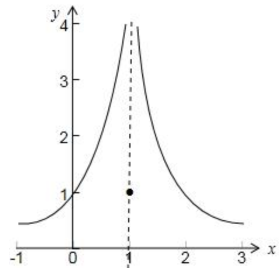
复合函数：

二、典型例题

例 1：设定义域为 R 的函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x-1|},x\neq 1\\ 1,x=1\end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f^2\left(x\right)+bf\left(x\right)+c=0$ 由 3 个不同的解 x_1,x_2,x_3，则 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=$______

思路：先作出 $f\left(x\right)$ 的图像如图：观察可发现对于任意的 y_0，满足 $y_0=f\left(x\right)$ 的 x 的个数分别为 2 个（$y_0>0,y_0\neq 1$）和 3 个（$y_0=1$），已知有 3 个解，从而可得 $f\left(x\right)=1$ 必为 $f^2\left(x\right)+bf\left(x\right)+c=0$ 的根，而另一根为 1 或者是负数。所以 $f\left(x_i\right)=1$，可解得：$x_1=0,x_2=1,x_3=2$，所以 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5$

答案：5



例 2：关于 x 的方程 $\left(x^2-1\right)^2-3\left|x^2-1\right|+2=0$ 的不相同实根的个数是（　　）

A.　3　　　B.　4　　　C.　5　　　D.　8

思路：可将 $\left|x^2-1\right|$ 视为一个整体，即 $t\left(x\right)=\left|x^2-1\right|$，则方程变为 $t^2-3t+2=0$ 可解得：$t=1$ 或 $t=2$，则只需作出 $t\left(x\right)=\left|x^2-1\right|$ 的图像，然后统计与 $t=1$ 与 $t=2$ 的交点总数即可，共有 5 个

答案：C

例 3：已知函数 $f(x)=|x+\dfrac{1}{x}|-|x-\dfrac{1}{x}|$，关于 x 的方程 $f^2(x)+a\left|f(x)\right|+b=0$（$a,b\in R$）恰有 6 个不同实数解，则 a 的取值范围是______.