微专题27 三角函数的值域与最值

一、基础知识

1、形如 $y = A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 解析式的求解：详见“函数 $y = A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 解析式的求解”一节，本节只列出所需用到的三角公式

（1）降幂公式：$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2},\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

（2）$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$

（3）两角和差的正余弦公式

$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

（4）合角公式：$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha+\varphi\right)$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$

2、常见三角函数的值域类型：

（1）形如 $y = A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的值域：使用换元法，设 $t=\omega x+\varphi$，根据 x 的范围确定 t 的范围，然后再利用三角函数图像或单位圆求出 $\omega x+\varphi$ 的三角函数值，进而得到值域

例：求 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right),x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 的值域

解：设 $t=2x-\dfrac{\pi}{4}$　　当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，$t=2x-\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$

$\therefore \sin t\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$\therefore f\left(x\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

（2）形如 $y=f\left(\sin x\right)$ 的形式，即 $y=f\left(t\right)$ 与 $t=\sin x$ 的复合函数：通常先将解析式化简为同角同三角函数名的形式，然后将此三角函数视为一个整体，通过换元解析式转变为熟悉的函数，再求出值域即可

例：求 $f\left(x\right)=\sin x-\cos^2 x+2,x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 的值域

解：$f\left(x\right)=\sin x-\left(1-\sin^2 x\right)+2=\sin^2 x+\sin x+1$

设$t=\sin x$　　$\because x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$　　$\therefore t\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

$y=t^2+t+1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

$\therefore y\in\left[\dfrac{3}{4},3\right]$，即$f\left(x\right)$的值域为$\left[\dfrac{3}{4},3\right]$

（3）含三角函数的分式，要根据分子分母的特点选择不同的方法，通常采用换元法或数形结合法进行处理（详见例 5，例 6）

二、典型例题

例 1：已知向量$\vec{a}=\left(\cos x,\sin x+\sqrt{3}\cos x\right),\vec{b}=\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x,-\sin x\right),f\left(x\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}$

（1）求函数$f\left(x\right)$的单调递增区间

（2）当$x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$时，求$f\left(x\right)$的取值范围

解：（1）$f\left(x\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos x\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)+\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\cdot\left(-\sin x\right)$

$$=\cos^2 x-\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$$

$$=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$\pi+2k\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le 2\pi+2k\pi\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\ \left(k\in Z\right)$

$\therefore$单调递增区间为：$\left[\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\right]\left(k\in Z\right)$

（2）思路：由（1）可得：$f\left(x\right)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，从$x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$得到角$2x+\dfrac{\pi}{3}$的范围，进而求出$f\left(x\right)$的范围

解：由（1）得：$f\left(x\right)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\because x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$　　$\therefore 2x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[0,\dfrac{5\pi}{6}\right]$