

微专题 37 向量的数量积——坐标法

在处理向量数量积问题时，若几何图形特殊（如正方形，等边三角形等），易于建系并写出点的坐标，则考虑将向量坐标化，一旦所求向量用坐标表示，其数量积等问题迎刃而解。

一、基础知识

1、向量的坐标表示

(1) 平面向量基本定理：在平面中，如果两个向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线，则对于平面上的任一向量 $\vec{a}$ ，存在 $x, y \in R$ ，使得 $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ ，且这种表示唯一。其中 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ 称为平面向量的一组基底，而有序实数对 (x, y) 称为在 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ 基底下的坐标

(2) 为了让向量能够放置在平面直角坐标系中，我们要选择一组特殊的基底 $\vec{i}, \vec{j}$ ，在方向上它们分别与 x, y 轴的正方向同向，在长度上， $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ ，由平面向量基本定理可得：平面上任一向量 $\vec{a}$ ，均有 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ，其坐标为 (x, y) ，从图上可观察到恰好是将向量 $\vec{a}$ 起点与坐标原点重合时，终点的坐标

(3) 已知平面上的两点坐标，也可求得以它们为起终点的向量坐标：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ （可记为“终” - “起”），所以只要确定了平面上点的坐标，则向量的坐标自然可求。另外 $A, B, \vec{AB}$ 三个坐标知二可求一，所以当已知向量坐标与其中一个点的坐标，也可求出另一个点的坐标

2、向量的坐标运算：设 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ ，则有：

(1) 加减运算： $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$

(2) 数乘运算： $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

(3) 数量积运算： $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

(4) 向量的模长： $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

3、向量位置关系的判定：

(1) 平行： $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$

(2) 垂直： $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

(3) 向量夹角余弦值： $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

4、常见的可考虑建系的图形：关于向量问题，一旦建立坐标系并成功写出相关点的坐标，则

问题常常迎刃而解。但难点如何甄别一道题适合使用建系的方法求解。如果你遇到以下图形，则可尝试建系的方法，看能否把问题解决

(1) 具备对称性质的图形：长方形，正方形，等边三角形，圆形

(2) 带有直角的图形：直角梯形，直角三角形

(3) 具备特殊角度的图形（ $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ 等）

二、典型例题：

例 1：在边长为 1 的正三角形 ABC 中，设 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CE}$ ，则

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$$

思路：上周是用合适的基底表示所求向量，从而解决问题，本周仍以此题为例，从另一个角度解题，观察到本题图形为等边三角形，所以考虑利用建系解决数量积问题，如图建系：

$$A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-\frac{1}{2}, 0\right), C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

下面求 E 坐标：令 $E(x, y) \therefore \overrightarrow{CE} = \left(x - \frac{1}{2}, y\right), \overrightarrow{CA} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\text{由 } \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CE} \text{ 可得：} \begin{cases} 3\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \\ 3y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases} \therefore E\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{BE} = \left(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{答案：} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}$$

例 2：（2012 江苏，9）如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = \sqrt{2}, BC = 2$ ，

点 E 为 BC 中点，点 F 在边 CD 上，若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \sqrt{2}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$

思路：本题的图型为矩形，且边长已知，故考虑建立直角坐标系求解，

以 A 为坐标原点如图建系： $B(\sqrt{2}, 0)$ ，设 $F(x, y)$ ，由 F 在 CD 上可得

$y = 2$ ，再由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \sqrt{2}$ 解出 x ： $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{AF} = (x, 2)$ ，

