微专题22 恒成立问题——参变分离法

一、基础知识：

1、参变分离：顾名思义，就是在不等式中含有两个字母时（一个视为变量，另一个视为参数），可利用不等式的等价变形让两个字母分居不等号的两侧，即不等号的每一侧都是只含有一个字母的表达式。然后可利用其中一个变量的范围求出另一变量的范围

2、如何确定变量与参数：一般情况下，那个字母的范围已知，就将其视为变量，构造关于它的函数，另一个字母（一般为所求）视为参数。

3、参变分离法的适用范围：判断恒成立问题是否可以采用参变分离法，可遵循以下两点原则：

（1）已知不等式中两个字母是否便于进行分离，如果仅通过几步简单变换即可达到分离目的，则参变分离法可行。但有些不等式中由于两个字母的关系过于“紧密”，会出现无法分离的情形，此时要考虑其他方法。例如：$\left(x-1\right)^2<\log_a x$，$\dfrac{1+x}{1-x}e^{-ax}>1$等

（2）要看参变分离后，已知变量的函数解析式是否便于求出最值（或临界值），若解析式过于复杂而无法求出最值（或临界值），则也无法用参变分离法解决问题。（可参见”恒成立问题——最值分析法“中的相关题目）

4、参变分离后会出现的情况及处理方法：（假设x为自变量，其范围设为D，$f\left(x\right)$为函数；a为参数，$g\left(a\right)$为其表达式）

（1）若$f\left(x\right)$的值域为$\left[m,M\right]$

①$\forall x\in D,g\left(a\right)\le f\left(x\right)$，则只需要$g\left(a\right)\le f\left(x\right)_{\min}=m$

$\forall x\in D,g\left(x\right)<f\left(x\right)$，则只需要$g\left(a\right)<f\left(x\right)_{\min}=m$

②$\forall x\in D,g\left(a\right)\ge f\left(x\right)$，则只需要$g\left(a\right)\ge f\left(x\right)_{\max}=M$

$\forall x\in D,g\left(a\right)>f\left(x\right)$，则只需要$g\left(a\right)>f\left(x\right)_{\max}=M$

③$\exists x\in D,g\left(a\right)\le f\left(x\right)$，则只需要$g\left(a\right)\le f\left(x\right)_{\max}=M$

$\exists x\in D,g\left(a\right)<f\left(x\right)$，则只需要$g\left(a\right)<f\left(x\right)_{\max}=M$

④$\exists x\in D,g\left(a\right)\ge f\left(x\right)$，则只需要$g\left(a\right)\ge f\left(x\right)_{\min}=m$

$\exists x\in D,g\left(a\right)>f\left(x\right)$，则只需要$g\left(a\right)>f\left(x\right)_{\min}=m$

（2）若 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left(m,M\right)$

① $\forall x\in D,g\left(a\right)\le f\left(x\right)$，则只需要 $g\left(a\right)\le m$

$\forall x\in D,g\left(a\right)< f\left(x\right)$，则只需要 $g\left(a\right)\le m$（注意与（1）中对应情况进行对比）

② $\forall x\in D,g\left(a\right)\ge f\left(x\right)$，则只需要 $g\left(a\right)\ge M$

$\forall x\in D,g\left(a\right)> f\left(x\right)$，则只需要 $g\left(a\right)\ge M$（注意与（1）中对应情况进行对比）

③ $\exists x\in D,g\left(a\right)\le f\left(x\right)$，则只需要 $g\left(a\right)< M$（注意与（1）中对应情况进行对比）

$\exists x\in D,g\left(a\right)< f\left(x\right)$，则只需要 $g\left(a\right)< M$

④ $\exists x\in D,g\left(a\right)\ge f\left(x\right)$，则只需要 $g\left(a\right)> m$（注意与（1）中对应情况进行对比）

$\exists x\in D,g\left(a\right)> f\left(x\right)$，则只需要 $g\left(a\right)> m$

5、多变量恒成立问题：对于含两个以上字母（通常为 3 个）的恒成立不等式，先观察好哪些字母的范围已知（作为变量），那个是所求的参数，然后通常有两种方式处理

（1）选择一个已知变量，与所求参数放在一起与另一变量进行分离。则不含参数的一侧可以解出最值（同时消去一元），进而多变量恒成立问题就转化为传统的恒成立问题了。

（2）将参数与变量进行分离，即不等号一侧只含有参数，另一侧是双变量的表达式，然后按所需求得双变量表达式的最值即可。

二、典型例题：

例 1：已知函数 $f\left(x\right)=e^x-ae^{-x}$，若 $f'(x)\ge 2\sqrt{3}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_______

思路：首先转化不等式，$f'(x)=e^x+ae^{-x}$，即 $e^x+\dfrac{a}{e^x}\ge 2\sqrt{3}$ 恒成立，观察不等式 a 与 e^x 便于分离，考虑利用参变分离法，使 a,x 分居不等式两侧，$a\ge -\left(e^x\right)^2+2\sqrt{3}e^x$，若不等式恒成立，只需 $a\ge\left(-\left(e^x\right)^2+2\sqrt{3}e^x\right)_{\max}$，令 $g\left(x\right)=-\left(e^x\right)^2+2\sqrt{3}e^x=-\left(e^x-\sqrt{3}\right)^2+3$ **（解析式可看做关于 e^x 的二次函数，故配方求最值）** $g\left(x\right)_{\max}=3$，所以 $a\ge 3$

答案：$a\ge 3$

例 2：已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{a}{x}$，若 $f\left(x\right)<x^2$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上恒成立，则 a 的取值范围是________