

微专题 21 多元不等式的证明

多元不等式的证明是导数综合题的一个难点,其困难之处如何构造合适的一元函数,本章节以一些习题为例介绍常用的处理方法。

一、基础知识

1、在处理多元不等式时起码要做好以下准备工作:

- (1) 利用条件粗略确定变量的取值范围
- (2) 处理好相关函数的分析(单调性,奇偶性等),以备使用

2、若多元不等式是一个轮换对称式(轮换对称式:一个 n 元代数式,如果交换任意两个字母的位置后,代数式不变,则称这个代数式为轮换对称式),则可对变量进行定序

3、证明多元不等式通常的方法有两个

- (1) 消元: ① 利用条件代入消元 ② 不等式变形后对某多元表达式进行整体换元
- (2) 变量分离后若结构相同,则可将相同的结构构造一个函数,进而通过函数的单调性与自变量大小来证明不等式
- (3) 利用函数的单调性将自变量的不等关系转化为函数值的不等关系,再寻找方法。

二、典型例题:

例 1: 已知 $f(x) = \ln x, g(x) = f(x) + ax^2 + bx$, 其中 $g(x)$ 图像在 $(1, g(1))$ 处的切线平行于 x 轴

(1) 确定 a 与 b 的关系

(2) 设斜率为 k 的直线与 $f(x)$ 的图像交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1 < x_2)$, 求证:

$$\frac{1}{x_2} < k < \frac{1}{x_1}$$

解: (1) $g(x) = \ln x + ax^2 + bx \quad \therefore g'(x) = \frac{1}{x} + 2ax + b$, 依题意可得:

$$g'(1) = 1 + 2a + b = 0 \Rightarrow b = -(2a + 1)$$

(2) 思路: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}$, 所证不等式为 $\frac{1}{x_2} < \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} < \frac{1}{x_1}$

即 $\frac{x_2 - x_1}{x_2} < \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{x_1}$, 进而可将 $\frac{x_2}{x_1}$ 视为一个整体进行换元, 从而转变为证明一元不等

式

解: 依题意得 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}$, 故所证不等式等价于:

$$\frac{1}{x_2} < \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_2} < \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{x_1} \Leftrightarrow 1 - \frac{x_1}{x_2} < \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2}{x_1} - 1$$

令 $t = \frac{x_2}{x_1}, (t > 1)$, 则只需证: $1 - \frac{1}{t} < \ln t < t - 1$

先证右边不等式: $\ln t < t - 1 \Leftrightarrow \ln t - t + 1 < 0$

$$\text{令 } h(t) = \ln t - t + 1 \quad h'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$$

$\therefore h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减 $\therefore h(t) < h(1) = 0$

即 $\ln t - t + 1 < 0$

对于左边不等式: $1 - \frac{1}{t} < \ln t \Leftrightarrow \ln t + \frac{1}{t} - 1 > 0$

$$\text{令 } p(t) = \ln t + \frac{1}{t} - 1, \text{ 则 } p'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2}$$

$\therefore p(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增 $\therefore p(t) > p(1) = 0$

小炼有话说:

(1) 在证明不等式 $\frac{1}{x_2} < \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} < \frac{1}{x_1}$ 时, 由于 x_1, x_2 独立取值, 无法利用等量关系消去

一个变量, 所以考虑构造表达式 $f(x_1, x_2)$: 使得不等式以 $f(x_1, x_2)$ 为研究对象, 再利用换元

将多元不等式转变为一元不等式

(2) 所证不等式为轮换对称式时, 若 x_1, x_2 独立取值, 可对 x_1, x_2 定序, 从而增加一个可操作的条件

例 2: 已知函数 $f(x) = x \ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 设 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$, 且 $x_1 \neq x_2$, 证明: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

解:

(1) 定义域为 $(0, +\infty)$