

微专题 08 函数方程问题的分析

一、基础知识:

1、函数方程: 含有未知函数的等式叫做函数方程, 例如: $f(x) = -f(-x)$, $f(1-x) = f(1+x)$ 都可称为函数方程。在高中阶段, 涉及到函数方程有以下几个类型:

(1) 表示函数 $f(x)$ 的某种性质: 例如 $f(x) = f(-x)$ 体现 $f(x)$ 是偶函数; $f(x+1) = f(x)$ 体现 $f(x)$ 是周期为 1 的周期函数 (可详见“函数对称性与周期性”一节)

(2) 可利用解方程组的思想解出涉及的函数的解析式: 例如: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$, 可用 $\frac{1}{x}$

$$\text{代替 } x \text{ 得 } f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}, \text{ 即 } \begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x} - x$$

(3) 函数方程也是关于变量的恒等式, 所以通过对变量赋特殊值得到某些数的函数值

2、双变量函数方程的赋值方法:

(1) 对 x, y 均赋特殊值, 以得到某些点的函数值, 其中有些函数值会对性质的推导起到关键作用, 比如 $f(0), f(1), f(-1)$, 在赋特殊值的过程中要注意所赋的值要符合函数定义域。

(2) 其中某一个变量不变, 另一个赋特殊值, 可得到单变量的恒等式, 通常用于推断函数的性质

3、常见函数所符合的函数方程: 在填空选择题时可作为特殊的例子辅助处理, 但是在解答题中不能用这些特殊的函数代表函数方程

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y): f(x) = kx$

(2) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y): f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$

(3) ① 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x \cdot y) = f(x) + f(y): f(x) = \log_a x$

② 当 $x \in \{x | x \neq 0\}$ 时, $f(x \cdot y) = f(x) + f(y): f(x) = \log_a |x|$

二、典型例题

例 1: 已知函数 $f(x)$ 对任意的 $m, n \in R$ 均有 $f(m+n) = f(m) + f(n)$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$

(1) 求证: $f(x)$ 为奇函数

(2) 求证: $f(x)$ 为 R 上的增函数

(1) 思路: 要证明奇函数, 则需要 $f(x), f(-x)$ 出现在同一等式中, 所以考虑令 $m=x, n=-x$, 则有 $f(0)=f(x)+f(-x)$, 再通过代入特殊值计算出 $f(0)=0$ 即可

解: (1) 令 $m=x, n=-x$, 则 $f(0)=f(x)+f(-x)$

令 $m=0, n=0$, 则 $f(0)=f(0)+f(0)$ 解得 $f(0)=0$

$\therefore f(x)=-f(-x)$

$\therefore f(x)$ 为奇函数

(2) 思路: 要证明单调递增, 则需任取 $x_1, x_2 \in R$, 且 $x_1 < x_2$, 去证明 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小, 结合等式, 则需要让 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 分居等号的两侧, 才能进行作差。所以考虑 $x_2=(x_2-x_1)+x_1$, 进而 $m+n=x_2, n=x_1$ 。只需判断 $f(x_2-x_1)$ 的符号即可

解: 任取 $x_1, x_2 \in R$, 且 $x_1 < x_2$, 令 $m=x_2-x_1, n=x_1$, 代入方程可得:

$$f[(x_2-x_1)+x_1]=f(x_2-x_1)+f(x_1)$$

$$\therefore f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)$$

$$\because x_2 > x_1 \quad \therefore x_2-x_1 > 0, \text{依题意可得: } f(x_2-x_1) > 0$$

$$\therefore f(x_2)-f(x_1) > 0 \text{ 即 } f(x_2) > f(x_1)$$

$\therefore f(x)$ 为增函数

小炼有话说: 第(2)问将 x_2 拆分为 $(x_2-x_1)+x_1$ 是本题证明的亮点, 达到了让 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 分居等号的两侧的目的

例 2: 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$, 对于任意实数 a, b 都满足 $f(a+b)=f(a)f(b)$, 且 $f(1) \neq 0$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$

(1) 求 $f(0)$ 的值

(2) 求证: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数

(3) 求不等式: $f(x^2+x) < \frac{1}{f(2x-4)}$ 的解集

解: (1) 令 $a=b=0$, 则有 $f(0)=f^2(0)$, 解得 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$

令 $a=0, b=1$ 可得: $f(1)=f(0)f(1) \Rightarrow f(1)[f(0)-1]=0$

$$\because f(1) \neq 0 \quad \therefore f(0)=1$$

(2) 思路: 考虑证明 $f(x)$ 单调递增, 则需构造出 $f(x_1)-f(x_2)$, 即可设 $x_2 > x_1$ 且令