

2024 年江苏省南京市田家炳中学高考数学考前模拟试卷

一、单项选择题

- 已知 $x^2 \in \{1, 0, x\}$ ，则实数 x 的值为（ ）
A. 0 B. 1 C. -1 D. ± 1
- 已知复数 z 满足 $5z - 3 = 4(1 - 3z)i$ ，则 $|\bar{z}| =$ （ ）
A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{10}{13}$ C. $\frac{5}{17}$ D. $\frac{8}{17}$
- 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 均为单位向量，且 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b} - \vec{a}$ 的夹角大小为（ ）
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. π
- 设 α ， β 是两个平面， m ， n 是两条直线，则下列命题为真命题的是（ ）
A. 若 $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ， $m \perp n$ ，则 $\alpha \perp \beta$
B. 若 $m // \alpha$ ， $m // \beta$ ， $\alpha \cap \beta = n$ ，则 $m // n$
C. 若 $m \subset \alpha$ ， $n \subset \alpha$ ， $m // \beta$ ， $n // \beta$ ，则 $\alpha // \beta$
D. 若 $m \perp n$ ， $m \perp \alpha$ ，则 $n // \alpha$
- $(3 - 2x^3)(x + a)^5$ 的展开式中的各项系数和为 243，则该展开式中 x^4 的系数为（ ）
A. -130 B. 46 C. 61 D. 190
- 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $-a_1, S_2, S_3$ 成等差数列. 若存在两项 $a_m, a_n (m, n \in \mathbb{N}^*)$ 使得 $\sqrt{a_m \cdot a_n} = 8a_1$ ，则 $\frac{1}{m} + \frac{9}{n}$ 的最小值是（ ）
A. 16 B. 2 C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{8}{3}$
- 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点， A 是 C 的左顶点，点 P 在过 A 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上， $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形， $\angle F_1F_2P = 120^\circ$ ，则 C 的离心率为（ ）
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$
- 关于 x 的不等式 $ax - 2a > 2x - \ln x - 4$ 的解集中有且仅有两个整数，则正实数 a 的取值范围是（ ）
A. $(\ln 3, 2)$ B. $[2 - \ln 3, 2)$ C. $(0, 2 - \ln 3]$ D. $(0, 2 - \ln 3)$

二、多选题

(多选) 9. 已知复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. $z^2 = |z|^2$

B. $\overline{z+z}$ 一定是实数

C. 若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, 则 $z_1 \cdot z_2=0$

D. 若复数 z 的平方是纯虚数, 则复数 z 的实部和虚部相等或者互为相反数

(多选) 10. 下列说法中, 正确的是 ()

A. 一组数据 5, 8, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22 的第 80 百分位数为 18

B. 若随机变量 $\xi \sim N(3, \sigma^2)$, 且 $P(\xi < 6) = 0.84$, 则 $P(3 < \xi < 6) = 0.34$

C. 袋中装有除颜色外完全相同的 4 个红球和 2 个白球, 从袋中不放回地依次抽取 2 个球, 记事件 A = 第一次抽到的是白球, 事件 B = 第二次抽到的是白球, 则 $P(B|A) = \frac{1}{3}$

D. 设随机事件 A, B , 已知 $P(A) = 0.4$, $P(B|A) = 0.3$, $P(B|\overline{A})$, 则 $P(B) = 0.24$

(多选) 11. 设 O 为坐标原点, F 为抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点, 过焦点 F 且倾斜角为 θ 的直线 l 与抛物线 C 交于 M, N 两点 (点 M 在第二象限), 当 $\theta = 30^\circ$ 时, $|MF| = 2$, 则下列说法正确的是 ()

A. $p = 3$

B. $\triangle MON$ 的面积的最小值为 $\frac{9}{2}$

C. 存在直线 l , 使得 $\angle OMF + \angle ONF > 90^\circ$

D. 分别过点 M, N 且与抛物线相切的两条直线互相垂直

三、填空题

12. 若曲线 $y = x^3 + 3ax + 16$ 与 x 轴相切, 则实数 a 的值是 _____.

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则满足 $S_{n^2} = (S_n)^2$ 的数列 $\{a_n\}$ 的一个通项 $a_n =$ _____. (写出一个正确的答案即可, 不必考虑所有情况)

14. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 满足 $\cos 2A - \cos 2B = 2\sin C (\sin B - \sin C)$, 则 $\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}$ 的最小值为 _____.

四、解答题

15. 在凸四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = AD$, $AB \perp AD$, $BC = 4$, $CD = 2$.

(1) 若 $\cos \angle BCD = \frac{1}{4}$, 求 $\sin \angle ABC$ 的值;

(2) 求四边形 $ABCD$ 面积 S 的最大值.

16. 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = AD = AC = 3$, $PA = BC = 4$, M, N 分别为线段 AD, PC 上一点, $AM = 2MD$.

(1) 若 N 为 PC 的中点, 证明: $MN \parallel$ 平面 PAB ;