微专题26 求未知角的三角函数值

在三角函数的解答题中，经常要解决求未知角的三角函数值，此类问题的解决方法大体上有两个，一是从角本身出发，利用三角函数关系列出方程求解，二是向已知角（即三角函数值已知）靠拢，利用已知角将所求角表示出来，再利用三角函数运算公式展开并整体代换求解，本周着力介绍第二种方法的使用和技巧

一、基础知识：

1、与三角函数计算相关的公式：

（1）两角和差的正余弦，正切公式：

① $\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$　　② $\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

③ $\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　　④ $\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

⑤ $\tan\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　　⑥ $\tan\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

（2）倍半角公式：

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

（3）辅助角公式：$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha+\varphi\right)$，其中$\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$

2、解决此类问题的方法步骤：

（1）考虑用已知角表示未知角，如需要可利用常用角进行搭配

（2）等号两边同取所求三角函数，并用三角函数和差公式展开

（3）利用已知角所在象限和三角函数值求出此角的其他函数值

（4）将结果整体代入到运算式即可

3、确定所涉及角的范围：当已知角的一个三角函数值求其他三角函数值时，角的范围将决定其他三角函数值的正负，所以要先判断角的范围，再进行三角函数值的求解。确定角的范围有以下几个层次：

（1）通过不等式的性质解出该角的范围（例如：$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$，则$\alpha+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right)$）

（2）通过该角的三角函数值的符号，确定其所在象限。

（3）利用特殊角将该角圈在一个区间内（区间长度通常为$\dfrac{\pi}{4}$）

（4）通过题目中隐含条件判断角的范围。例如：$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{6}{5}$，可判断出$\alpha$在第一象限

二、典型例题：

例1：已知$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$，求：

（1）$\sin\alpha$
（2）$\sin 2\alpha$

解：（1）已知的角为$\alpha+\dfrac{\pi}{3}$ ，而所求角$\alpha=\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}$,故可以考虑

$$\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$$

而$\because\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}\right),\therefore\alpha+\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 而$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{5}$，故$\alpha+\dfrac{\pi}{3}$在第一象限

$$\therefore\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}\quad\therefore\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$$

（2） 与（1）类似。考虑$2\alpha=2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{2\pi}{3}$，则

$$\sin 2\alpha=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}\right]=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{9}{25}\right)=-\frac{12+8\sqrt{3}}{25}$$

小炼有话说：
（1）本题先利用已知角表示未知角，然后用已知角整体代换求解
（2）注意在求已知角其他的三角函数值时，要确定已知角的范围，进而确定其他三角函数值的符号
（3）本题第 1 问也可利用方程的思想，即$\begin{cases}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\dfrac{3}{5}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$ 来求解，但方程过于复杂，难于计算，要进行比较，体会题目所给方法的方便之处

例 2：已知$\cos\alpha=\dfrac{1}{7},\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{14}$，且$0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.
（1）求$\tan 2\alpha$；
（2）求β.

解：（1）$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\therefore\sin\alpha=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\quad\therefore\tan\alpha=4\sqrt{3}$